

ESTUDO DE MODELOS DE DOIS FLUIDOS ACOPLADOS AO MÉTODO FCT
EM ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Raphael Viggiano Neves de Freitas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein
Felipe Bastos de Freitas Rachid

Rio de Janeiro
Junho de 2017

ESTUDO DE MODELOS DE DOIS FLUIDOS ACOPLADOS AO MÉTODO FCT
EM ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Raphael Viggiano Neves de Freitas

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Gustavo César Rachid Bodstein, Ph.D.

Prof. Felipe Bastos de Freitas Rachid, D.Sc.

Prof. Manuel Ernani de Carvalho Cruz, Ph.D.

Prof. Jader Riso Barbosa Junior, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2017

Freitas, Raphael Viggiano Neves de

Estudo de modelos de dois fluidos acoplados ao método FCT em escoamentos bifásicos/ Raphael Viggiano Neves de Freitas. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XVI, 94 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 80-87.

1. Escoamento bifásico. 2. Simulação. 3. Modelo de dois fluidos. I. Bodstein, Gustavo César Rachid *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha namorada e companheira, Carina Nogueira Sondermann, pelo amor, apoio e dedicação dados a mim durante toda a minha jornada acadêmica, sempre estando ao meu lado nos momentos mais difíceis e nos mais felizes.

Demonstro minha gratidão também aos meus pais, Elisabeth e José, pelo apoio, suporte e pela educação durante todos os meus anos de vida.

Agradeço aos meus orientadores Gustavo César Rachid Bodstein e Felipe Bastos de Freitas Rachid, pelo tempo e dedicação que dedicaram a mim na elaboração dessa dissertação

Também presto minha gratidão aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da COPPE UFRJ, pelo conhecimento repassado durante toda a jornada acadêmica do mestrado. E a fundação CAPES, pela oportunidade de bolsa a mim concedida.

Finalmente, agradeço ao grupo do Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica (LABMFA): Rodrigo Patricio, Aline Figueiredo e Jaciara Roberta e Mamta Jotkar, pela convivência diária, pelo suporte e amizade.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO DE MODELOS DE DOIS FLUIDOS ACOPLADOS AO MÉTODO FCT EM ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Raphael Viggiano Neves de Freitas

Junho/2017

Orientadores: Gustavo César Rachid Bodstein

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Programa: Engenharia Mecânica

A simulação numérica de escoamentos bifásicos em gasodutos é uma ferramenta de grande importância em várias áreas da indústria, em especial a indústria de petróleo e gás, porque permite prever o comportamento do escoamento em função dos principais parâmetros do problema. Esse trabalho tem como foco o estudo de dois modelos de dois fluidos diferentes, denominados 4E1P (quatro equações e uma pressão) e 5E2P (cinco equações e duas pressões), com o objetivo de avaliar suas capacidades em descrever adequadamente alguns problemas padrões. Ambos os modelos são formulados a partir das equações unidimensionais de conservação de massa e quantidade de movimento, e aplicados a simulações de escoamentos bifásicos. Os modelos se diferenciam principalmente na sua estrutura de autovalores e na forma como a pressão é tratada. O modelo 4E1P considera uma pressão comum para as fases e é condicionalmente hiperbólico, enquanto o modelo 5E2P é incondicionalmente hiperbólico e considera, a priori, a existência de duas pressões, uma para cada fase. O método numérico utilizado para resolver as equações diferenciais parciais que definem os modelos é o FCT (*Flux-Corrected Transport*). Primeiramente são estudados casos conceituais da literatura, como forma de validação e análise dos modelos matemáticos e do método numérico. Ao final se estuda o caso de interesse para engenharia em que se simula escoamentos estratificados presentes em gasodutos, comparando os resultados com um *software* comercial e com resultados oriundos de outros trabalhos da literatura, apresentando boa concordância.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STUDY OF TWO FLUID MODELS COUPLED TO THE FCT METHOD IN TWO-PHASE FLOWS

Raphael Viggiano Neves de Freitas

June/2017

Advisors: Gustavo César Rachid Bodstein

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Department: Mechanical Engineering

Numerical simulation of two-phase flows is a tool of great importance to various areas of industry, especially in the oil and gas industry, in predicting the behavior of the flows according to the main parameters of the problem. This work aims to study two different two-phase flow models, named 4E1P (four equations and single pressure) and 5E2P (five equations and two pressures), with the objective of evaluating their abilities to adequately describe some standard problems. Both models are formulated by the one-dimensional mass and momentum conservation equations, and are applied to simulate two-phase flows. The models differ mainly in their eigenstructure and how the pressure is treated. The 4E1P model considers a single pressure for both phases and is conditionally hyperbolic, while the 5E2P model is unconditionally hyperbolic and considers two pressures a priori. The numerical method used to solve the partial differential equations that define the models is the FCT (*Flux-Corrected Transport*). First some conceptual cases that are widely covered in the literature are studied, as a way of validating and analyzing the mathematical models and the numerical method. Finally, the cases of engineering interest of stratified flows in pipelines are simulated and the results are compared with the output of a commercial software and those obtained by in the literature, showing good agreement.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS	IX
ÍNDICE DE TABELAS	XII
LISTA DE SÍMBOLOS	XIII
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA	1
1.3 OBJETIVOS.....	2
1.3.1 Objetivo Geral	2
1.3.2 Objetivos Específicos	3
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	4
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	5
2.1 CLASSIFICAÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS.....	5
2.2 TRABALHOS ENVOLVENDO MODELOS DE DOIS FLUIDOS	7
3 . MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO	11
3.1 MODELO DE QUATRO EQUAÇÕES E PRESSÃO ÚNICA (4E1P).....	11
3.2 MODELO DE CINCO EQUAÇÕES E DUAS PRESSÕES (5E2P)	13
3.2.1 Resolução do modelo de cinco equações.....	14
3.2.2 Relaxação instantânea de pressão	16
3.2.3 Relaxação instantânea da velocidade.....	17
3.3 MODELAGEM DOS PARÂMETROS INTERFACIAIS	18
3.3.1 Pressão de interface	18
3.3.2 Velocidade de interface	19
3.4 MODELAGEM DE ESCOAMENTOS EM GASODUTOS.....	19
3.4.1 Geometria do duto	20
3.4.2 Pressão de interface para o caso estratificado.....	21
3.4.3 Termos fonte.....	22
3.5 ANÁLISE DE HIPERBOLICIDADE	23
3.5.1 Polinômio característico para o modelo 4E1P	24
3.5.2 Polinômio característico para o modelo 5E2P	26
4. MÉTODO NUMÉRICO.....	28

4.1	EQUAÇÕES NA FORMA CANÔNICA.....	28
4.1.1	Modelo 4E1P na forma canônica.....	28
4.1.2	Modelo 5E2P na forma canônica.....	29
4.2	MÉTODO NUMÉRICO E DISCRETIZAÇÃO.....	30
4.2.1	Discretização do Termo de Fluxo Conservativo.....	32
4.2.2	Discretização do Termo de Fluxo Não Conservativo.....	35
4.2.3	Imposição das Condições de Contorno.....	36
4.2.4	Critério de Convergência.....	37
5.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	39
5.1	ESCOAMENTO DOMINADO PELA GRAVIDADE (WATER FAUCET).....	39
5.1.1	Estudo de malha para o modelo 4E1P.....	42
5.1.2	Estudo de malha para o modelo 5E2P.....	45
5.1.3	Estudo dos coeficientes difusivo e dispersivo do FCT.....	48
5.2	SEPARAÇÃO DE FASES (SEDIMENTATION).....	56
5.3	TUBO DE CHOQUE COM INTERFACE SEPARANDO OS DOIS FLUIDOS.....	61
5.4	PROBLEMAS DE GASODUTOS.....	64
5.4.1	Breve Descrição do OLGA.....	64
5.4.2	Descrição geral do problema de escoamento estratificado em gasodutos.....	65
5.4.3	Caso <i>low holdup</i>	67
5.4.4	Caso <i>high holdup</i>	71
6 .	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	75
6.1	CONCLUSÕES.....	75
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	78
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	80
	APÊNDICE A. ANÁLISE DE HIPERBOLICIDADE E AVALIAÇÃO DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	88
	APÊNDICE B. FORMA CANÔNICA ALTERNATIVA PARA OS MODELOS .	93
	Modelo 4E1P na forma canônica B – Esquema 2.....	93
	Modelo 5E2P na forma canônica B – Esquema 2.....	94

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Padrões de escoamento bifásico em dutos horizontais.	6
Figura 3.1: Seção transversal de um gasoduto com escoamento bifásico.	20
Figura 5.1: Representação da evolução ao longo do tempo do escoamento para o problema <i>water faucet</i> . (a) Campo de escoamento uniforme inicial. (b) Campo de escoamento dado um tempo $t = t_o + \Delta t$. (c) Regime permanente.	40
Figura 5.2: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.	42
Figura 5.3: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.	43
Figura 5.4: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.	44
Figura 5.5: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.	44
Figura 5.6: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.	45
Figura 5.7: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.	46
Figura 5.8: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.	47
Figura 5.9: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.	47
Figura 5.10: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.	49
Figura 5.11: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.	49
Figura 5.12: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.	50
Figura 5.13: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.	51
Figura 5.14: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.	52

Figura 5.15: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.....	52
Figura 5.16: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.....	53
Figura 5.17: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo, eliminando as curvas em que o efeito dispersivo se apresenta.	54
Figura 5.18: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.....	54
Figura 5.19: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo, eliminando as curvas em que o efeito dispersivo se apresenta.	55
Figura 5.20: Comparação entre a distribuição da fração volumétrica de gás apresentada pelos modelos 4E1P e 5E2P para os coeficientes difusivos otimizados.	56
Figura 5.21: Representação da evolução ao longo do tempo do escoamento para o problema <i>sedimentation</i> . (a) Mistura distribuída no tubo no instante inicial. (b) Processo transiente de separação das fases pela ação da gravidade. (c) Condição final esperada, onde as duas fases estão separadas.	57
Figura 5.22: Distribuição da fração volumétrica de gás para o caso <i>sedimentation</i>	59
Figura 5.23: Distribuição da pressão para o caso <i>sedimentation</i>	59
Figura 5.24: Evolução dos máximos autovalores ao longo de cada simulação.....	60
Figura 5.25: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do tubo variando o número de células de discretização, para o modelo 5E2P.	62
Figura 5.26: Distribuição de velocidade ao longo do tubo variando o número de células de discretização, para o modelo 5E2P.	63
Figura 5.27: Distribuição de pressão ao longo do tubo variando o número de células de discretização, para o modelo 5E2P.....	63
Figura 5.28: Distribuição de pressão ao longo do duto para o caso <i>low holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.	68
Figura 5.29: Distribuição de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para o caso <i>low holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.	69

Figura 5.30: Distribuição de velocidade de gás ao longo do duto para o caso <i>low holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.	70
Figura 5.31: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do duto para o caso <i>low holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.....	70
Figura 5.32: Distribuição de pressão ao longo do duto para o caso <i>high holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.	72
Figura 5.33: Distribuição de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para o caso <i>high holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.	73
Figura 5.34: Distribuição de velocidade de gás ao longo do duto para o caso <i>high holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.	73
Figura 5.35: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do duto para o caso <i>high holdup</i> considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o <i>software</i> OLGA.....	74
Figura A.0.1: Análise de hiperbolicidade para o caso <i>low holdup</i> com o termo de correção de pressão de BESTION (1990). À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.	90
Figura A.0.2: Análise de hiperbolicidade para o caso <i>low holdup</i> com o termo de correção de pressão para escoamentos estratificados, p_c . À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.....	91
Figura A.0.3: Análise de hiperbolicidade para o caso <i>high holdup</i> com o termo de correção de pressão de BESTION (1990). À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.	91
Figura A.0.4: Análise de hiperbolicidade para o caso <i>high holdup</i> com o termo de correção de pressão para escoamentos estratificados, p_c À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.....	92

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1: Constantes para o caso teste <i>water faucet</i>	41
Tabela 5.2: Condições iniciais e de contorno para o caso <i>water faucet</i>	41
Tabela 5.3: Constantes para o caso <i>sedimentation</i>	58
Tabela 5.4: Constantes para o caso do tubo de choque.	61
Tabela 5.5: Condição inicial do tubo de choque com interface.	61
Tabela 5.6: Condições iniciais e de contorno para o caso <i>low holdup</i>	67
Tabela 5.7: Constantes para o caso <i>low holdup</i>	67
Tabela 5.8: Condições iniciais e de contorno para o caso <i>high holdup</i>	71
Tabela 5.9: Constantes para o caso <i>low holdup</i>	71

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos:

A	Área da seção transversal [m ²]
A_k	Área da seção transversal para cada fase k [m ²]
\mathbf{A}	Matriz dos termos conservativos
\mathbf{B}	Matriz quadrada
B_{fk}	Termo de força de corpo para cada fase k [kg/m ² s ²]
c_k	Velocidade de propagação de onda da fase [m/s]
D	Diâmetro interno do duto [m]
D_h	Diâmetro hidráulico [m]
D_{hk}	Diâmetro hidráulico para cada fase k [m]
f_I	Fator de atrito na interface
f_k	Fator de atrito de cada fase k
F	Número de Froude
\mathbf{F}	Vetor dos termos de fluxo
\mathbf{F}^{ad}	Termo de fluxo anti-difusivo
\mathbf{F}^{cad}	Correção do termo de fluxo anti-difusivo
\mathbf{F}^d	Termo de fluxo difusivo
$\hat{\mathbf{F}}^{FCT}$	Vetor dos termos de fluxo calculados pelo FCT
$\hat{\mathbf{F}}^{RI}$	Vetor dos termos de fluxo calculados por Ritchmyer
g	Aceleração da gravidade [m/s ²]
\mathbf{H}	Matriz dos termos não conservativos
i	Variação do número de equações
j	Discretização espacial
k	Índice caracterizador de fase, G para gás ou L para líquido
L	Comprimento do duto [m]
m	Função definida na Eq. (4.29)
\mathbf{m}	Vetor utilizado para a discretização dos termos não conservativos

N	Número de células de discretização
\mathbf{N}	Vetor utilizado na representação dos termos não conservativos
N_{EQ}	Número de Equações
p	Pressão [Pa]
p_{ck}	Termo de correção de pressão, para escoamentos estratificados [Pa]
Δp_k	Termo de geral de correção de pressão [Pa]
P	Quantidade de movimento linear [kgm/s]
\mathbf{Q}	Vetor de variáveis conservadas
\mathbf{Q}^d	Vetor de variáveis conservadas da solução difusiva
$\bar{\mathbf{Q}}$	Vetor das variáveis conservadas médio calculado na Eq.(4.16)
$\tilde{\mathbf{Q}}$	Vetor de variáveis conservadas atualizado
r	Raio interno do duto [m]
r_p	Coeficiente de relaxação de pressão [$\text{Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$]
r_u	Coeficiente de relaxação de velocidade [$\text{kg/m}^3\text{s}$]
R	Constante dos gases [J/kgK]
Re_k	Número de Reynolds para cada fase k
S	Função sinal definida na Eq. (4.24)
S_I	Perímetro da interface [m]
S_k	Perímetro molhado de cada fase k [m]
\mathbf{S}	Vetor dos termos fonte
t	Tempo [s]
t^n	Discretização no tempo
T	Temperatura do fluido [K]
T_I	Termo do atrito na interface [$\text{kg/m}^2\text{s}^2$]
T_{kw}	Termo do atrito na parede do duto para cada fase k [$\text{kg/m}^2\text{s}^2$]
u_k	Velocidade de cada fase k [m/s]
u_{Sk}	Velocidade superficial da fase k [m/s]
V_k	Volume ocupado por cada fase k [m ³]
\mathbf{W}	Vetor de variáveis primitivas

x	Coordenada cartesiana longitudinal [m]
X	Variável adimensional definida na Eq.(3.38)
\mathbf{x}	Vetor definido na Eq. (4.30)
\mathbf{y}	Vetor definido na Eq. (4.30)
\mathbf{z}	Vetor definido na Eq. (4.30)

Símbolos gregos:

α_k	Fração volumétrica da fase k
β	Ângulo de inclinação entre o duto e a horizontal [graus]
γ	Razão dos calores específicos
$\Delta \mathbf{Q}^d$	Variação do vetor de variáveis conservadas da solução difusiva
Δt	Variação no tempo [s]
Δx	Variação da distância [m]
ε	Rugosidade superficial [m]
ζ	Fração volumétrica residual
λ_i	Autovalores
λ_{\max}^n	Maior velocidade em que as ondas de pressão se propagam [m/s]
μ	Coefficiente dispersivo do método numérico FCT
μ_k	Viscosidade dinâmica de cada fase k [kg/ms]
η_0	Constante presente na Eq. (4.26) e na Eq. (4.27)
η_1	Constante presente na Eq. (4.26)
η_2	Constante presente na Eq. (4.27)
ν	Coefficiente difusivo do método numérico FCT
ν_k	Viscosidade dinâmica de cada fase k [m ² /s]
ξ	Erro relativo
ρ_k	Massa específica de cada fase k [kg/m ³]
ρ_k^0	Massa específica de referência de cada fase k [kg/m ³]
σ	Tensão superficial [N/m]
τ_I	Tensão na interface [Pa]

τ_k	Tensão na parede de cada fase k [Pa]
χ	Variável dependente do problema

Lista de Acrônimos:

4E1P	Modelo de quatro equações e pressão única
5E2P	Modelo de cinco equações e duas pressões
AUSM	<i>Advection Upstream Splitting Method</i>
CFL	Número de CFL, Courant-Friedrichs-Lewy
DDT	<i>Deflagration-to-detonation transition</i>
DEM	<i>Discrete equation method</i>
DFM	<i>Drift-Flux Model</i>
EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
FCT	<i>Flux-Corrected Transport</i>
HEM	<i>Homogeneous Equilibrium Model</i>
HLL	Harten-Lax-van Leer
HLLC	Harten-Lax-van Leer-Contact
MOL	<i>Method of lines</i>
MUSTA	<i>Multi-Stage</i>
TFM	<i>Two-Fluid Model</i>
TVD	<i>Total Variation Diminishing</i>

1. INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

O uso de dutos para o transporte de fluidos com o objetivo de circulação, troca térmica, extração e despejo de matéria, está presente em diversas áreas de aplicação na engenharia, como na indústria química, nuclear, de refrigeração e no setor de óleo e gás. Muitos dos escoamentos no interior desses dutos são constituídos por mais de um fluido que, por sua vez, podem se encontrar em diversas configurações de acordo com a natureza do escoamento e perfil topográfico do duto.

Atualmente no Brasil, devido à presença atuante da indústria de extração de petróleo, gasodutos são utilizados para o transporte de óleo e gás natural dos campos *offshore* (no leito do mar) até as plantas de processamento em terra. Nestes dutos encontra-se presente um escoamento do tipo bifásico onde coexistem petróleo na fase líquida e gás natural na fase gasosa. O caminho percorrido por esses dutos, de forma geral, é longo e pode possuir inclinações e variantes que podem levar os fluidos a se acomodarem em padrões de escoamentos diversos. Esses padrões de escoamentos, denominados como estratificado, golfadas (*slug*), bolhas ou anular são dependentes, além das condições geométricas do duto, da evolução das grandezas físicas ao longo do escoamento. Então, o acompanhamento das grandezas físicas do escoamento como pressão, velocidade, temperatura e fração volumétrica durante a operação são de extrema importância para garantir a capacidade de produção, integridade e o funcionamento dos equipamentos instalados a montante e a jusante do duto.

Para que haja um real acompanhamento, é necessário que sejam feitas medições ao longo do duto. No entanto, como este tipo de medição é inviável devido às condições em que este duto se encontra, muitas vezes no fundo do mar e em área de difícil acesso, as simulações numéricas surgem para suprir esta necessidade, necessitando apenas das medições realizadas na entrada e na saída do duto.

1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA

O monitoramento dos gasodutos é ainda mais relevante em situações críticas que podem interferir na produção, tais como abertura e fechamento de válvulas, passagem de

pigs para manutenção e inspeção, ocorrência de vazamentos e outros fenômenos tal como a deposição de hidratos na tubulação. Essas condições adversas fazem com que a capacidade de prever o comportamento do escoamento dentro dos gasodutos por meio de simulações numéricas seja de alta relevância tanto na fase de projeto quanto na sua operação.

Tendo em vista a necessidade de simular o escoamento no interior desses dutos, diversos modelos matemáticos que levam em consideração as equações de conservação governantes dos escoamentos foram desenvolvidos ao longo dos anos. Os resultados são modelos cada vez mais complexos, em que diferentes fenômenos presentes no escoamento são considerados de forma a se prever com maior acurácia a evolução do problema físico real. Os modelos, de forma geral, são compostos por um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas não-lineares, que são discretizadas e resolvidas por meio de uma abordagem numérica.

Além disso, com o aumento da capacidade de processamento das ferramentas de computação, métodos numéricos mais robustos começaram a ser empregados para resolver o sistema de equações definido pelo modelo matemático. O que levou a resultados mais precisos dentro de intervalos de tempo relativamente curtos, tornando a simulação computacional de problemas de engenharia um tópico de grande aplicabilidade na atualidade tanto no âmbito acadêmico quanto no industrial.

Essa dissertação aborda problemas de escoamentos bifásicos, de forma a simular casos testes presentes na literatura, assim como casos de interesse prático para escoamentos estratificados em gasodutos.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é comparar dois modelos matemáticos que podem ser utilizados para simular escoamentos bifásicos em gasodutos, em que as equações de conservação de massa e quantidade de movimento são empregadas para cada fase. A principal diferença entre os dois modelos, é que um considera uma pressão comum para as fases, enquanto o outro considera, a priori, a existência de duas pressões, uma para cada fase, o que implica em acrescentar uma equação adicional ao modelo. Ambos os

modelos serão testados e comparados frente a casos padrões usuais disponíveis na literatura, assim como a casos de interesse como escoamentos em gasodutos.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos consistem em comparar dois modelos unidimensionais de dois fluidos existentes na literatura que são, neste trabalho, resolvidos utilizando o método numérico FCT. O primeiro é o modelo de pressão única e quatro equações, o 4E1P, que já foi utilizado juntamente com o FCT nos trabalhos de ESSAMA (2004), BUENO (2013), FIGUEIREDO *et al.* (2017) e PATRICIO (2016) para resolver problemas em gasodutos. O segundo é o modelo de cinco equações e duas pressões, o 5E2P, que é uma versão isotérmica, ou seja, sem as equações da energia, do modelo proposto por SAUREL E ABRALL (1999). Essa versão isotérmica já foi utilizada por autores como MUNKEJORD (2010) e ANSARI E DARAMIZADEH (2012) para resolver problemas de escoamentos bifásicos.

A solução numérica das equações é feita pelo método numérico robusto e preciso, o FCT, *Flux-Correct Transport* do inglês, descrito originalmente por BORIS E BOOK (1973). O FCT é um método de discretização dos termos de fluxo das equações de conservação para modelos compostos por um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas.

Primeiramente são simulados casos de *benchmarks* que apresentam soluções físicas conhecidas ou esperadas e são amplamente estudados na literatura. Os resultados obtidos por estas simulações são utilizados como comparativo entre os dois modelos estudados. Esses *benchmarks* também são utilizados para a obtenção de um melhor entendimento dos parâmetros de ajuste do FCT, visando os melhores resultados para cada modelo.

Também são simulados casos de interesse da indústria de óleo e gás. Os escoamentos simulados são encontrados em gasodutos de escoamentos bifásicos, que transportam uma mistura líquido-gás, onde a fase gasosa composta por gás natural predomina sobre a fase líquida composta por óleo. Com os resultados obtidos das simulações em regime permanente, ambos os modelos podem ser comparados detalhadamente, bem como com os resultados obtidos com o *software* comercial OLGA (SCHLUMBERGER, OLGA). Objetiva-se também, para os casos de gasodutos, estudar duas diferentes formas de se tratar a pressão de interface entre os fluidos e seus efeitos na solução do problema.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 2 dessa dissertação apresenta a revisão bibliográfica, onde se discute sucintamente as publicações relevantes utilizadas como referência para o trabalho.

No capítulo 3 são apresentados os dois modelos matemáticos utilizados para representar os escoamentos bifásicos simulados, mostrando as equações governantes e as devidas equações constitutivas. Neste mesmo capítulo são discutidas as principais características de cada modelo e as correlações utilizadas na descrição de escoamentos estratificados em dutos.

No capítulo 4 é detalhado o método utilizado para a solução numérica das equações diferenciais parciais, mostrando as discretizações utilizadas, o procedimento numérico detalhando, a imposição das condições de contorno e o critério de convergência utilizado.

No capítulo 5 são detalhados os resultados obtidos para os casos utilizados para testar os dois modelos numéricos abordados. É escolhido um conjunto de casos usuais da literatura para os quais se dispõem de soluções analíticas ou semianalíticas, com base nas quais são avaliados os desempenhos dos dois modelos. O último caso teste abordado neste capítulo se refere a um escoamento estratificado em gasodutos, onde são feitas novamente comparações entre os modelos e as diversas formas que eles podem ser abordados.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho e são sugeridas algumas ideias para trabalhos futuros.

Ao final do trabalho, o Apêndice A é dedicado à análise de hiperbolicidade e a avaliação da imposição de contorno para duas abordagens do modelo condicionalmente hiperbólico. Já no Apêndice B, são apresentadas as duas maneiras diferentes de se escrever os vetores e matrizes na forma canônica que dão margem às variantes na forma de resolução das equações dos modelos.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma revisão de literatura, baseada nas publicações relevantes utilizadas como consulta para o desenvolvimento dessa dissertação.

Primeiramente, são revisados os trabalhos mais gerais, em que são discutidos escoamentos bifásicos em dutos e os regimes, ou padrões, em que esse tipo de escoamentos pode se encontrar. São também definidos os tipos de modelagem matemática utilizada para representar esses escoamentos. Por fim, são apresentados trabalhos que englobam modelos bifásicos de dois fluidos, direcionados ao tipo de modelagem abordada nessa dissertação.

2.1 CLASSIFICAÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Escoamentos bifásicos possuem grande complexidade e são caracterizados por fenômenos que são predominantemente tridimensionais. A interação entre as fases, assim como a interação de cada fase com a parede do duto, pode levar à formação de diferentes estruturas de interface no escoamento que, juntamente com a forma como as interfaces são transportadas, definem o padrão de escoamento formado. A classificação dos tipos de escoamentos bifásicos segundo seus diferentes padrões varia de acordo com os autores. A dificuldade de tratar este tipo de escoamento ocorre devido à constante evolução da interface entre as fases, já que é uma região móvel em que existem descontinuidades nas propriedades do escoamento e é uma região que pode apresentar deformações em sua geometria quando imposta a certas condições. Desta forma, ISHII E HIBIKI (2006) classificam os escoamentos bifásicos em dutos baseando-se na estrutura da interface, classificando-os como escoamentos separados, transitórios ou de misturas, e dispersos.

TAITEL E DUKLER (1976) estudaram o caso mais específico de escoamentos do tipo líquido-gás em dutos, com o objetivo de identificar o regime em que o escoamento se encontra. Os regimes considerados são o de golfadas (*slug*), estratificado suave, estratificado com pequenas ondulações, bolhas dispersas e anular, conforme representados na Figura 2.1. Os autores criaram um modelo teórico capaz de relacionar, por meio de parâmetros adimensionais, as variáveis geométricas e as propriedades físicas envolvidas no escoamento, e assim desenvolveram um mapa que é capaz de prever o

regime em que o escoamento se encontra dependendo das velocidades dos fluidos, da fração volumétrica e do diâmetro do duto.

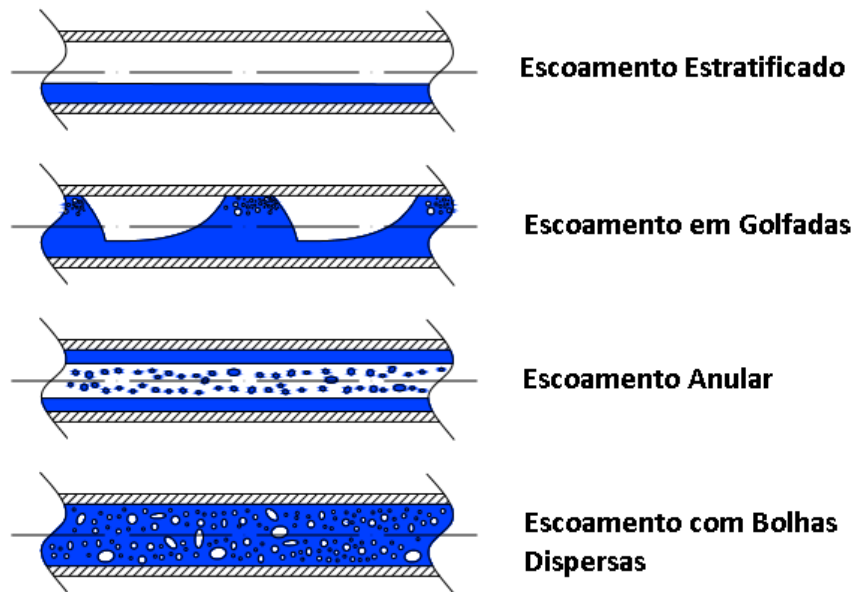


Figura 2.1: Padrões de escoamento bifásico em dutos horizontais.

O conjunto de equações de Navier-Stokes tridimensional serve como modelo matemático para o escoamento. Porém, a solução numérica de tal sistema tridimensional se torna impraticável devido ao grande volume de fluido presente em dutos longos. Isso leva à solução de sistemas unidimensionais, em que são consideradas equações médias de balanço, que por sua vez possuem dificuldades na representação de termos, como os efeitos viscosos e de troca térmica, que devem ser modelados, muitas vezes de forma específica para diferentes casos (ISHII E MISHIMA 1984, DREW E PASSMAN 1999). Os modelos em geral são compostos por sistemas de equações diferenciais parciais. Autores como PATANKAR (1980), FLETCHER (1988) e TORO (1999), apresentam diversos métodos numéricos com o enfoque em resolução desses tipos de sistemas de equações diferenciais parciais.

A fim de se modelar matematicamente escoamentos bifásicos três tipos de abordagem são apresentados na literatura. STEWART E WENDROFF (1984) classificam essas abordagens como:

- Modelo de Equilíbrio Homogêneo (*Homogeneous Equilibrium Model* – HEM)
- Modelo de Mistura (*Drift-Flux Model* – DFM)
- Modelo de Dois Fluidos (*Two-Fluid Model* – TFM)

Os modelos do tipo HEM são menos complexos porque utilizam apenas uma equação de conservação para massa, quantidade de movimento e energia para a mistura entre as duas fases. Já a modelagem do tipo DFM, assim como a citada anteriormente, utiliza apenas equações de conservação considerando as duas fases como uma mistura, mas considera duas velocidades diferentes para cada fase relacionando-as através de uma velocidade de escorregamento entre elas. O TFM é um modelo mais complexo, que considera equações de conservação separadas para cada fluido. Neste trabalho o enfoque reside no estudo de dois modelos do tipo TFM, pois são modelos mais completos e podem avaliar de forma mais robusta e acurada os parâmetros envolvidos no escoamento.

2.2 TRABALHOS ENVOLVENDO MODELOS DE DOIS FLUIDOS

No âmbito do TFM, ISSA E KEMPF (2003) usaram um modelo unidimensional de dois fluidos para simular a transição de escoamentos gás-líquido estratificados para escoamentos em golfadas no interior de dutos. Os autores formularam um modelo de quatro equações de conservação, para massa e quantidade de movimento, para cada fluido. Aqui a equação da energia não é utilizada, levantando a hipótese de que os escoamentos a serem resolvidos são isotérmicos. O sistema de equações diferenciais parciais é resolvido numericamente por uma discretização por volumes finitos em malha deslocada, podendo resolver de forma acurada o fenômeno de transição do regime estratificado para o *slug*.

SIMÕES *et al.* (2014), também com interesse em simular escoamentos em dutos onde há transição de regimes entre estratificado e *slug*, utilizaram um modelo unidimensional de dois fluidos, composto de seis equações de conservação. O sistema de equações diferenciais parciais que compõem o modelo são duas equações de conservação de massa, duas para conservação da quantidade de movimento e duas para a conservação da energia, cada uma relacionada as fases presentes no escoamento. Os autores simulam numericamente o escoamento utilizando o método numérico de volumes finitos com uma malha de resolução alta. Seus resultados são validados com dados experimentais e correlações presentes na literatura, apresentando bons resultados tanto para o coeficiente de transferência de calor quanto para perda de carga ao longo do duto.

BAER E NUNZIATO (1986) propõem um modelo unidimensional e incondicionalmente hiperbólico de sete equações diferenciais parciais, sendo equações de

conservação de massa, quantidade de movimento e energia para cada fase do escoamento e fechado por uma equação de compactação, relacionada à compactação de material granular explosivo. Aqui os autores estão interessados em modelar e resolver numericamente problemas de escoamento bifásicos que representem o fenômeno de transição entre deflagração e detonação (DDT), do inglês *deflagration-to-detonation transition*, em materiais granulares. A solução numérica é obtida pelo método de linhas (MOL), *method-of-lines*, demonstrando que o modelo representa de forma acurada o complexo processo de combustão associados a queima convectiva, deflagração, crescimento e detonação em explosivos granulares. Os autores concluem também que o modelo usado é aplicável a outros tipos de escoamentos multifásicos onde efeitos de descontinuidade são de grande importância.

Utilizando como base o modelo proposto por BAER E NUNZIATO (1986), SAUREL E ABGRALL (1999) propõem um novo modelo incondicionalmente hiperbólico que envolve seis equações de conservação, assim como o seu precursor, mas é fechado por uma equação de evolução da fração volumétrica. São consideradas duas pressões, uma para cada fase, e também compressibilidade em ambas as fases. O modelo possui a capacidade de representar diversas combinações entre fases, como mistura de gases, gás-líquido e partículas sólidas em suspensão em gás ou líquido. Os autores alegam que o modelo também possui a forte característica na abrangência de representar diversos tipos de regime de escoamento, como estratificado, bolhas e misturas. Além disso, é proposto um novo método numérico que discretiza o sistema de equações na forma canônica por um esquema modificado tipo Godunov-Rusanov, onde se utiliza o esquema de GODUNOV (1959), mas o termo de fluxo é discretizado conforme RUSANOV (1961). O problema de Riemann é resolvido utilizando um esquema modificado de aproximação HLL, como o proposto por HARTEN *et al.* (1983), para obtenção do fluxo numérico. O método apresentou bons resultados para os problemas teste, todos envolvendo descontinuidades, mas apresentou certa difusividade em sua solução.

Posteriormente, SAUREL E ABGRALL (2003) propõem uma nova abordagem numérica resolvendo as equações do sistema usando um método de equações discretas, do inglês, *discrete-equations method*, DEM. O método desenvolvido por esse trabalho é bem robusto e acurado, porém possui um alto custo computacional.

Para o mesmo modelo de sete equações, FURFARO E SAUREL (2015) constroem um novo esquema aproximado, do tipo HLLC, introduzido por TORO *et al.* (1994). Resolvendo o de Riemann associado, pela determinação do vetor de fluxo discretizado

nas fronteiras entre células, a fim de fechar o esquema iterativo governado pelo método de Godunov. O esquema numérico é relativamente simples quando comparados aos outros esquemas aplicados à modelos modificados do modelo BN, porém é acurado e robusto. Uma outra vantagem é a utilização de um Riemann *solver* do tipo HLLC para cada fase separada, podendo-se aumentar o número de fases no modelo sem acrescentar grandes dificuldades na resolução numérica.

MUNKEJORD (2007) utiliza o esquema numérico de ROE (1981), para resolver o modelo de pressão única e quatro equações e o modelo de duas pressões e cinco equações, que é a versão isotérmica do sistema proposto por SAUREL E ABGRALL (1999). O autor compara os resultados entre os modelos utilizados e analisa a forma como a pressão é relaxada para o sistema de cinco equações. Posteriormente, o mesmo autor, MUNKEJORD (2010), utilizando o esquema MUSTA, desenvolvido por TORO (2006) e TORO E TITAREV (2006), e também utilizado em MUNKEJORD *et al.* (2009), resolve os mesmos modelos, fazendo uma comparação com o método utilizado anteriormente.

Tendo como base o mesmo modelo isotérmico de cinco equações, ANSARI E DARAMIZADEH (2012), resolvem numericamente com o esquema ASUM, apresentado inicialmente por LIOU E STEFFEN (1993) e desenvolvido posteriormente para atender escoamentos bifásicos unidimensionais por EVJE E FJELDE (2002, 2003). Os autores aqui estão preocupados em simular a transição de um escoamento estratificado para um regime de golfadas.

O método FCT inicialmente introduzido por BORIS E BOOK (1973) e posteriormente aprimorado por BOOK *et al.* (1975) é utilizado para resolver sistemas de equações diferenciais parciais não-lineares hiperbólicas, em que se espera obter uma boa solução de problemas que envolvem ondas de choque e descontinuidades. É um método que apresenta interferências dissipativas baixas e que possui ampla aplicação quando o sistema de equações é escrito na forma canônica de leis de conservação.

BUENO (2013) utiliza o FCT para resolver problemas de escoamento bifásico em gasodutos com o modelo isotérmico de pressão única e quatro equações. Com o objetivo de melhorar o modelo numérico utilizado por BUENO (2013), SONDERMANN (2016) aplica mais uma equação de conservação ao modelo, a equação da energia relacionada a mistura entre fluidos. Para este trabalho, também foi apresentado a comparação com o simulador OLGA para diversos casos de interesse, apresentando boa concordância. O método numérico FCT também foi validado por SONDERMANN *et al.* (2015) onde os

autores apresentam validação do método com soluções analíticas para escoamentos do tipo monofásico em gases.

FIGUEIREDO *et al.* (2017) também utiliza o método numérico FCT para simular escoamentos bifásicos isotérmicos em padrão estratificado presente em dutos. FIGUEIREDO (2016) gera casos de dutos na presença de vazamentos, pelo mesmo esquema numérico anterior, e partir desses casos é aplicado a estratégia de localização de vazamentos proposta pela autora. Seus resultados também são comparados frente ao simulador comercial OLGA, apresentando bons resultados.

PATRICIO *et al.* (2016) simulou, utilizando o método numérico FCT, escoamento monofásico isotérmico de líquido na presença de um *pig*, equipamento utilizado para limpeza de dutos. No trabalho posterior, PATRICIO (2016) apresentou resultados para escoamentos bifásicos também utilizando o método numérico FCT.

3. MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESCOAMENTO BIFÁSICO

Neste capítulo serão apresentados os dois modelos matemáticos utilizados para descrever os escoamentos bifásicos. Os modelos são unidimensionais, de Dois Fluidos, onde cada fase evolui com sua própria velocidade, massa específica e fração volumétrica, baseados nas equações de conservação de massa e quantidade de movimento. Para esse trabalho será somente considerada a forma isotérmica dos modelos, onde não se encontram presentes as equações de conservação de energia.

A metodologia para se obter esses modelos pode ser vista em DREW E PASSMAN (1999), onde um procedimento de média e as hipóteses propostas por DREW (1983) são aplicadas nas equações monofásicas de Navier-Stokes para cada fase. O resultado final é um conjunto de equações diferenciais parciais hiperbólicas unidimensionais que representam os fenômenos governantes do escoamento.

3.1 MODELO DE QUATRO EQUAÇÕES E PRESSÃO ÚNICA (4E1P)

O modelo de pressão única e quatro equações, denominado 4E1P, é um modelo unidimensional de Dois Fluidos amplamente usado para simulação de escoamentos bifásicos. O escoamento é tratado como isotérmico e a fase líquida é considerada incompressível. As equações de conservação de massa, Eq. (3.1) e Eq. (3.2), e balanço de quantidade de movimento, Eq. (3.3) e Eq. (3.4), onde o índice (G) referencia a fase gasosa e o índice (L) a fase líquida.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G u_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G^2) + \alpha_G \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta p_{I,G} \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} = B_{jG} + T_I + T_{Gw}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L u_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L^2) + \alpha_L \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta p_{I,L} \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} = B_{jL} - T_I + T_{Lw}. \quad (3.4)$$

Utiliza-se o índice k para denotar a fase que a grandeza representa, ou seja $k \in (G, L)$. O símbolo α_k representa a fração volumétrica de fluido, ρ_k a massa específica, u_k denota a velocidade e p a pressão, tratada de forma comum para ambas as fases. O termo $\Delta p_{I,k}$ chamado de termo de correção de pressão, representa a diferença entre a pressão comum p , e a pressão de interface entre as fases $p_{I,k}$. Os termos fontes do modelo são denotados por B_{fk} , que representa as forças de corpo, T_I representa arrasto interfacial e T_{kw} o atrito na parede. As forças de corpo são escritas como

$$B_{fk} = -\rho_k \alpha_k g \sin \beta, \quad (3.5)$$

onde g é a gravidade e β é o ângulo entre a horizontal e a linha de centro do tubo. Os termos de arrasto interfacial e de parede são específicos para cada tipo de regime de escoamento, necessitando de correlações específicas para escoamentos estratificados em gasodutos que serão apresentadas na subseção (3.4.3).

Para o fechamento do sistema, as frações volumétricas devem respeitar a condição

$$\alpha_G + \alpha_L = 1. \quad (3.6)$$

A equação de estado utilizada para as simulações é dada por

$$p_k = c_k^2 (\rho_k - \rho_k^0), \quad (3.7)$$

em que a massa específica de referência, ρ_k^0 , e a velocidade de propagação de onda no meio, c_k , são constantes específicas de cada fluido, para um dado estado termodinâmico onde é considerado um valor de temperatura constante. Na consideração do modelo isotérmico, sem as equações para conservação de energia, vale destacar que a velocidade de propagação de onda para o gás é dada por

$$c_G = \sqrt{RT}. \quad (3.8)$$

Para o modelo 4E1P a equação de estado se aplica somente à fase de gás, já que nesse modelo se considera a fase líquida incompressível. Para este modelo as variáveis dependentes do sistema de EDP são: u_G , u_L , α_G e p .

3.2 MODELO DE CINCO EQUAÇÕES E DUAS PRESSÕES (5E2P)

O modelo de cinco equações apresentado nessa dissertação é a versão isotérmica do modelo apresentado por SAUREL E ABGRALL (1999), que é uma variante do modelo desenvolvido por BAER E NUNZIATO (1986). O modelo completo envolve sete equações, considerando as equações de conservação da energia, uma para cada fase. Na versão isotérmica, utilizada nesse trabalho, não são consideradas as equações de conservação de energia no sistema de equações governantes do escoamento. Dessa forma, estão incluídas no modelo, as mesmas equações de conservação utilizadas pelo modelo 4E1P, isto é, as equações de conservação de massa e quantidade de movimento, reduzindo assim a forma do modelo proposto por SAUREL E ABGRALL (1999) para um modelo de cinco equações, nesse trabalho referenciado como 5E2P. O modelo 5E2P, assim como o 4E1P, é um modelo unidimensional de dois fluidos, onde sua principal diferença está no tratamento da pressão de cada fase, além de considerar a fase líquida como compressível e a inclusão de uma equação adicional de evolução para a fração volumétrica.

Desconsiderando-se a hipótese de pressão única para ambas as fases, adiciona-se uma variável primitiva ao sistema, em comparação com o 4E1P, sendo necessária uma equação a mais para o fechamento do sistema. A Eq. (3.9) representa a advecção da fração volumétrica de gás, indicando que a fração volumétrica é advectada com a velocidade interfacial, que por sua vez também pode ser modelada de acordo com o regime de escoamento. Essa equação é obtida pelo processo de média de DREW (1983) que também pode ser visto em DREW E PASSMAN (1999), onde o processo de média é descrito e a equação é deduzida. O sistema de equações é descrito por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G) + u_I \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G) = r_p(p_g - p_l), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G) = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L) = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G u_G) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_G \rho_G u_G^2) + \alpha_G \frac{\partial p_g}{\partial x} + \Delta p_{I,G} \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} = B_{fG} + T_I + T_{Gw}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L u_L) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_L \rho_L u_L^2) + \alpha_L \frac{\partial p_L}{\partial x} + \Delta p_{I,L} \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} = B_{fL} - T_I + T_{Lw}. \quad (3.13)$$

O modelo é fechado com a relação entre as frações volumétricas, Eq. (3.6), utilizada no 4E1P e com a equação de estado, Eq. (3.7) apresentada no modelo anterior.

O termo r_p que aparece na equação de evolução da fração volumétrica é um parâmetro de relaxação de pressão e u_I é a velocidade média interfacial. Para este modelo as variáveis dependentes do sistema de EDP são: u_G , u_L , α_G , p_G e p_L .

3.2.1 Resolução do modelo de cinco equações

Para a solução do sistema de cinco equações é necessário considerar os termos fonte de relaxação de pressão e velocidade separadamente para evitar que esses cresçam demasiadamente ao longo da simulação, criando efeitos não físicos. O modelo é então dividido em duas partes e resolvido por uma técnica de passo fracionário.

Com o tratamento das duas fases de forma compressível, cada fluido possui sua própria equação de estado. Em problemas em que há um choque de pressão, por exemplo, cada onda de choque possuirá duas velocidades e pressões distintas, relativas a cada fase, mas os dois fluidos não conseguem reter a diferença de pressão, tendendo sempre a uma pressão de equilíbrio em intervalos de tempo curtos. Já a velocidade possui um processo de relaxação, que é representado pelo termo T_I de arrasto interfacial, mais lento que a pressão. A relaxação da velocidade, ou arrasto interfacial, pode ser incluída na forma

$$T_I = r_u(u_L - u_G), \quad (3.14)$$

onde r_u é o coeficiente de relaxação de velocidade.

Os termos de relaxação de velocidade, r_u , e de pressão, r_p , requerem atenção no seu tratamento. Para o arrasto interfacial, existem diversas correlações presentes na

literatura, dependentes do regime do escoamento. Maiores valores de r_u levam à aproximação entre a magnitude das velocidades das fases. Sendo assim, para que haja uma independência entre as velocidades em relação ao arrasto interfacial, considera-se $r_u \equiv 0$.

Já a estimativa do coeficiente de relaxação de pressão é mais complicada, tendo em vista que o processo de relaxação ocorre em uma escala de tempo muito pequena. O procedimento mais comum é supor que o coeficiente de relaxação de pressão tende a infinito, $r_p \rightarrow \infty$, denominado de relaxação de pressão instantânea. Fazendo uso dessa hipótese, as pressões de cada fase atingem a pressão de equilíbrio, se igualando, instantaneamente.

O procedimento de solução do sistema de cinco equações pela técnica de passo fracionário é feito resolvendo-se inicialmente o sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas, constituído pelas Eqs. (3.9) à (3.13), utilizando os coeficientes de relaxação de pressão e velocidade nulos, $r_u \equiv 0$ e $r_p \equiv 0$, pelo método numérico FCT e posteriormente, resolve-se, utilizando os resultados obtidos na parte hiperbólica como valor inicial, o sistema de equações diferenciais ordinárias que representa os fenômenos de relaxação constituído pelas Eqs. (3.15) à (3.19),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G) = r_p(p_g - p_l), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G) = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L) = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_G \rho_G u_G) = r_u(u_L - u_G), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_L \rho_L u_L) = -r_u(u_L - u_G). \quad (3.19)$$

Esse sistema de EDO pode ser resolvido por uma rotina numérica quando os valores de r_u e r_p são conhecidos. Para relaxação instantânea de pressão ou velocidade, os procedimentos descritos nas duas próximas seções são mais eficazes.

3.2.2 Relaxação instantânea de pressão

Valores exatos para o coeficiente de relaxação de pressão são geralmente desconhecidos tendo em vista que as escalas de tempo até as pressões atingirem a pressão de equilíbrio são relativamente baixas. Essa condição impõe valores muito altos de r_p , o que torna a hipótese da relaxação de pressão instantânea a mais utilizada na literatura, já que numericamente é muito mais simples obter-se uma solução direta quando se adota a hipótese de relaxação instantânea. Para o sistema de sete equações que engloba as equações de conservação de energia, SAURELL E ABGRALL (1999) descrevem um método de solução direta para a relaxação de pressão instantânea com base nos valores das variáveis primitivas obtidas no passo hiperbólico como valor inicial. Utilizando o mesmo procedimento, MUNKEJORD (2007) criou seu próprio método direto para o modelo 5E2P, resolvendo uma equação de segundo grau para as frações volumétricas, de forma a se igualar as pressões p_k e manter $\alpha_k \rho_k$ e $\alpha_k \rho_k u_k$ constantes no passo da relaxação. Posteriormente, MUNKEJORD (2010) resolve a equação de segundo grau para as pressões mantendo também $\alpha_k \rho_k$ e $\alpha_k \rho_k u_k$ constantes no passo da relaxação e igualando as pressões. Essa nova abordagem resulta em resultados mais precisos que a anterior. O procedimento consiste em igualar as pressões pela equação de estado, Eq. (3.7), ou seja,

$$p = c_G^2 (\rho_G - \rho_G^0) \equiv c_L^2 (\rho_L - \rho_L^0). \quad (3.20)$$

O quadrado da pressão pode ser descrito segundo a Eq. (3.6), em que se multiplica entre a pressão calculada pela fase gasosa pela calculada pela fase líquida, o que fornece

$$p^2 = c_G^2 c_L^2 (\rho_G - \rho_G^0) (\rho_L - \rho_L^0) (\alpha_G + \alpha_L). \quad (3.21)$$

Após algumas manipulações matemáticas a seguinte equação de segundo grau é obtida:

$$0 = \psi_1 p^2 + \psi_2 p + \psi_3, \quad (3.22)$$

onde,

$$\psi_1 = 1, \quad (3.23)$$

$$\psi_2 = c_G^2 (\rho_G - \alpha_G \rho_G^0) + c_L^2 (\rho_L - \alpha_L \rho_L^0), \quad (3.24)$$

$$\psi_3 = c_G^2 c_L^2 (\rho_G^0 \rho_L^0 - \alpha_G \rho_G \rho_L^0 - \alpha_L \rho_L \rho_G^0), \quad (3.25)$$

em que o interesse reside na solução positiva, dada por

$$p = \frac{-\psi_2 + \sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3}}{2\psi_1}. \quad (3.26)$$

Depois de calculada a pressão relaxada, as massas específicas são recalculadas utilizando as equações de estado. E as frações volumétricas reobtidas de forma que o produto $\alpha_k \rho_k$ se mantenha constante em relação ao passo hiperbólico. Este é o procedimento utilizado neste trabalho.

3.2.3 Relaxação instantânea da velocidade

O processo de relaxação instantânea da velocidade não é comum, mas se for aplicável, como em alguns casos de mistura, é relativamente simples. Aqui é considerado que não há escorregamento entre as fases, o que implica em $u_G \equiv u_L$. O procedimento proposto por SAURELL E ABGRALL (1999) consiste em recalculer $\rho_G \alpha_G u_G$ e $\rho_L \alpha_L u_L$ de forma que as velocidades das fases se igualem, e que as seguintes relações se mantenham constantes com relação ao passo hiperbólico; $\sum_k (\rho_k \alpha_k u_k)$, $\rho_k \alpha_k$ e α_k . O procedimento seguinte para a obtenção da relaxação instantânea de velocidade é feito após a resolução de relaxação da pressão. A velocidade relaxada é obtida por

$$u = u_G = u_L = \frac{\rho_G \alpha_G \hat{u}_G + \rho_L \alpha_L \hat{u}_L}{\rho_G \alpha_G + \rho_L \alpha_L}, \quad (3.27)$$

onde \hat{u}_G e \hat{u}_L são os valores de velocidade fornecidos pelo passo hiperbólico. Nota-se que o procedimento de relaxação instantânea de velocidade também pode ser utilizado no modelo 4E1P.

3.3 MODELAGEM DOS PARÂMETROS INTERFACIAIS

Muitos modelos de pressão e velocidades interfaciais são propostos na literatura e muitas vezes a modelagem é feita com base em uma condição matemática e não necessariamente física, em que na modelagem os termos não conservativos são concebidos de modo a se obter um modelo matemático bem-posto.

3.3.1 Pressão de interface

Um dos modelos de pressão de interface que será utilizado nesse trabalho é o modelo desenvolvido por BESTION (1990). O autor escreve o termo de correção de pressão segundo a relação:

$$\Delta p_{I,k} \equiv p_k - p_{I,k} = \delta \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g} (u_g - u_l)^2. \quad (3.28)$$

Esse modelo é muito utilizado na literatura por possuir a característica de produzir uma ampla faixa de hiperbolicidade para o modelo 4E1P, o que garante que o modelo é bem-posto para um amplo intervalo de variáveis primitivas. Em contrapartida, o modelo é questionável do ponto de vista físico, já que foi proposto apenas com esse foco matemático. Mesmo para o modelo 5E2P, que é bem-posto para qualquer modelo de pressão interfacial, por ser incondicionalmente hiperbólico, como discutido nas próximas seções, o modelo de BESTION (1990) é aqui utilizado para que se possa comparar os modelos 4E1P e 5E2P com o máximo de similaridade possível. A variável δ é um parâmetro adimensional, e os trabalhos posteriores de EVJE E FLATEN (2003) sugerem utilizar o valor de $\delta = 1, 2$. Nas simulações desta dissertação, também utiliza-se $\delta = 1, 2$. É importante notar também que, ao se adotar este modelo para o termo de correção de pressão, a pressão interfacial $p_{I,k}$ é igual para ambas as fases no modelo 4E1P isto é, $p_G = p_L = p$. O mesmo já não é válido para o modelo 5E2P, já que esse modelo trata as

pressões como sendo diferentes na solução da parte hiperbólica. Vale ressaltar que em ambos os modelos 4E1P e 5E2P, o termo de diferença entre a pressão da fase a pressão interfacial, ou termo de correção de pressão, é igual para ambas as fases, $\Delta p_I = \Delta p_{I,G} = \Delta p_{I,L}$.

Para os casos de interesse como escoamentos dos gasodutos, em que o escoamento é estratificado e caracterizado por ondulações suaves na interface, também será utilizado como modelagem alternativa o termo de correção de pressão para escoamentos estratificados, p_{ck} , utilizado por autores como BARNEA E TAITEL (1993), ESSAMA (2004), SIMÕES *et al.* (2014) e FIGUEIREDO *et al.* (2017). A correlação para esse termo de pressão encontra-se definida na subseção 3.4.2.

3.3.2 Velocidade de interface

O modelo de velocidade de interface utilizado neste trabalho é aquele apresentado por SAURELL E ABGRALL (1999). Esse modelo foi escolhido por possuir uma interpretação física que abrange qualquer padrão de escoamento bifásico e estima a velocidade de interface com base na velocidade do centro de massa da mistura. Segundo os autores, esse modelo corresponde à velocidade onde todos os sistemas que não se encontram em equilíbrio irão relaxar. A estimativa da velocidade da interface ponderada pela massa é dada por:

$$u_I = \sum \alpha_k \rho_k u_k / \sum \alpha_k \rho_k . \quad (3.29)$$

3.4 MODELAGEM DE ESCOAMENTOS EM GASODUTOS

Um caso específico estudado nesse trabalho é a simulação de escoamentos bifásicos em regime estratificado presente em gasodutos. Gasodutos em geral se estendem por quilômetros e suas seções transversais possuem dimensão muito menores que seu comprimento, o que torna a abordagem unidimensional dos modelos 4E1P e 5E2P bastante apropriada para a simulação desses escoamentos.

3.4.1 Geometria do duto

Para os escoamentos em gasodutos estudados nesse trabalho é considerada a hipótese que os escoamentos apresentam regime estratificado. A seção transversal do escoamento é apresentada na Figura 3.1, em que r representa o raio interno do duto e h_L a altura de líquido na seção.

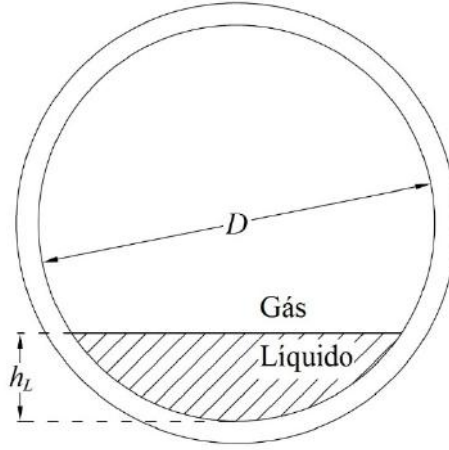


Figura 3.1: Seção transversal de um gasoduto com escoamento bifásico.

Considerando nas equações a seguir D como o diâmetro interno e A como a área da seção interna do duto, os perímetros molhados de cada fase, S_k , e o perímetro da interface, S_I , são calculados por

$$S_L = D \left[\pi - \cos^{-1} \left(2 \frac{h_L}{D} - 1 \right) \right], \quad S_G = \pi D - S_L, \quad (3.30)$$

$$S_I = D \sqrt{1 - \left(2 \frac{h_L}{D} - 1 \right)^2}. \quad (3.31)$$

O diâmetro hidráulico D_{hk} da tubulação, correspondente à cada fase k , é calculado por:

$$D_{hG} = 4 \frac{A_G}{S_G + S_I}, \quad (3.32)$$

$$D_{hL} = 4 \frac{A_L}{S_L}, \quad (3.33)$$

onde as áreas superficiais, A_G e A_L , de cada fase são calculadas por:

$$A_G = \alpha_G A \text{ e } A_L = \alpha_L A. \quad (3.34)$$

3.4.2 Pressão de interface para o caso estratificado

Como já foi apontado na subseção 3.3.1, o modelo de pressão de interface de BESTION (1990) possui pouca justificativa física, mas apresenta uma característica matemática desejável de ampliar a região de hiperbolicidade do modelo 4E1P. A fim de utilizar um modelo com uma justificativa física direcionada ao escoamento estratificado presente nos gasodutos, o modelo de correção de pressão utilizado por autores como BARNEA E TAITEL (1993), ESSAMA (2004), SIMÕES *et al.* (2014) e FIGUEIREDO *et al.* (2017), para esse regime de escoamento, é utilizado nessa dissertação, como um modelo alternativo com o objetivo de comparação. O modelo leva em consideração a curvatura local da interface e a tensão superficial entre os dois fluidos para o cálculo da pressão de interface $p_{I,k}$. Porém, pelo fato de se tratar de um escoamento estratificado suave, os efeitos de curvatura são negligenciados. Então, o termo de correção de pressão carrega somente os efeitos das colunas hidrostáticas dos fluidos, sendo expresso pela relação

$$\Delta p_{I,k} = p_{ck} = \rho_k \alpha_k g \cos(\beta) \frac{dh_L}{d\alpha_k}, \quad (3.35)$$

onde:

$$\frac{dh_L}{d\alpha_L} = \frac{\pi D}{4} \frac{\sqrt{1-X^2}}{1-X^2}, \quad (3.36)$$

$$\alpha_L = \left(\frac{1}{\pi} \right) \left\{ \pi - \cos^{-1}[X] + X \sqrt{(1-X^2)} \right\}, \quad (3.37)$$

$$X \equiv 2 \frac{h_L}{D} - 1. \quad (3.38)$$

De forma geral o termo de pressão hidrostática do gás é desprezível e, portanto, utiliza-se para casos de escoamento em gasodutos a aproximação $\Delta p_{I,G} = 0$.

3.4.3 Termos fonte

Os termos fonte de arrasto na parede do duto e arrasto de interface são dados respectivamente por:

$$T_{kw} = -\frac{\tau_k S_k}{A}, \text{ onde } \tau_k = \frac{1}{2} f_k \rho_k u_k |u_k|, \quad (3.39)$$

$$T_I = \frac{\tau_I S_I}{A}, \text{ onde } \tau_I = \frac{1}{2} f_I \rho_G (u_G - u_L) |u_G - u_L|, \quad (3.40)$$

onde f_k é o fator de atrito para cada fase, f_I é o fator de atrito para a interface entre líquido e gás, τ_k é a tensão na parede relativa a cada fase e τ_I é a tensão interfacial.

Para a determinação do fator de atrito na parede do duto, será utilizada a correlação de MOODY (1947) conforme apresentada por ZIGRANG E SILVESTER (1985):

$$f_k = \max \left\{ \frac{16}{Re_k}, 0,001375 \left\{ 1 + \left[2 \times 10^4 \left(\frac{\varepsilon}{D_{hk}} \right) + \frac{10^6}{Re_k} \right]^{1/3} \right\} \right\}, \quad (3.41)$$

em que o termo ε representa a rugosidade absoluta do duto. Também Re_k é o número de Reynolds referente a cada fase k , sendo a viscosidade dinâmica μ_k , o diâmetro hidráulico da tubulação, massa específica e velocidade absoluta, dada por

$$Re_k = \frac{\rho_k D_{hk} |u_k|}{\mu_k}. \quad (3.42)$$

O fator de atrito interfacial, f_I , é calculado utilizando a formulação, direcionada a escoamentos estratificados, proposta por ANDREUSSI *et al.* (1987).

$$\begin{cases} \frac{f_I}{f_G} = 1 + 29,7(F - 0,36)^{0,67} \left(\frac{h_L}{D} \right)^{0,2}, & \text{se } F > 0,36 \\ f_I = f_G, & \text{se } F \leq 0,36 \end{cases}, \quad (3.43)$$

em que D representa o diâmetro interno do duto e a variável F representa o número de Froude, calculado por

$$F = u_G \left(\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G} \frac{dA_L}{dh_L} \frac{1}{A_G g \cos \beta} \right)^{1/2}, \quad (3.44)$$

em que,

$$\frac{dA_L}{dh_L} = S_I. \quad (3.45)$$

Para o cálculo do fator de atrito na interface f_I , utiliza-se a correlação, para tubos lisos, de TAITEL E DUKLER (1976) para o cálculo do fator de atrito do gás na parede,

$$f_G = \max \left[\frac{16}{Re_G}; \frac{0,046}{Re_G^{0,2}} \right]. \quad (3.46)$$

3.5 ANÁLISE DE HIPERBOLICIDADE

A análise de hiperbolicidade dos modelos de dois fluidos possui grande importância na escolha do modelo ideal a ser utilizado em uma simulação. Os modelos são descritos pelas equações de conservação do escoamento, que em geral são equações diferenciais parciais hiperbólicas não-lineares. Uma combinação de parâmetros que leve o modelo a

perder sua hiperbolicidade, torna o modelo mal posto, resultando em instabilidades numéricas e resultados não convergidos.

Nesta subseção são apresentados os polinômios característicos necessários para se realizar uma análise de hiperbolicidade dos modelos estudados neste trabalho. Para a obtenção dos polinômios, as equações do modelo são escritas na seguinte forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{W})\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{B}(\mathbf{W})\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{W}), \quad (3.47)$$

onde \mathbf{W} é o vetor composto pelas variáveis primitivas do modelo e \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes compostas pelas variáveis primitivas. O polinômio característico é obtido a partir da relação

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}). \quad (3.48)$$

Quando as raízes do polinômio característico, ou seja, os autovalores são reais e seus autovetores são linearmente independentes o modelo é dito hiperbólico. As raízes do polinômio característico também possuem grande relevância na implementação das condições de contorno, o número de autovalores positivos em $x=0$ e negativos em $x=L$, determinam ao número de condições de contorno a serem prescritas nestas posições.

3.5.1 Polinômio característico para o modelo 4E1P

Para o modelo 4E1P o vetor das variáveis primitivas é escrito como:

$$\mathbf{W} = [p \quad \alpha_G \quad u_G \quad u_L]^T. \quad (3.49)$$

A matriz $(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A})$ associada ao modelo é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_G}{c_G^2}(u_G - \lambda) & \frac{p}{c_G^2}(u_G - \lambda) & \frac{p\alpha_G}{c_G^2} & 0 \\ 0 & -(u_l - \lambda) & 0 & (1 - \alpha_G) \\ \alpha_G & \Delta p_{I,G} & \frac{\alpha_G p}{c_G^2}(u_G - \lambda) & 0 \\ (1 - \alpha_G) & -\Delta p_{I,L} & 0 & (1 - \alpha_G)\rho_L(u_L - \lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Calculando o determinante e utilizando a relação de pressão de interface de BESTION (1999), o seguinte polinômio característico é encontrado:

$$\begin{aligned} P_{4E1P}^{BESTION}(\lambda) = & \frac{\alpha_G \rho_G \alpha_L \rho_L}{c_G^2} \left[-\alpha_G (u_G - \lambda)^2 (u_L - \lambda)^2 + \frac{\alpha_G \Delta p_I}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_G \alpha_L c_G^2}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \alpha_G c_G^2 (u_L - \lambda)^2 - \frac{\Delta p_I c_G^2}{\rho_L} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

As raízes do polinômio característico não são triviais de serem encontradas, não sendo possível determina-las analiticamente, necessitando-se recorrer a procedimentos numéricos. Porém, algumas propriedades podem ser inferidas baseadas na análise em casos limites. Quando o valor de uma das frações volumétricas é nulo, $\alpha_k = 0$, é esperado que o modelo se reduza a um modelo monofásico. Porém, nesta condição, as raízes do polinômio característico se tornam indeterminadas, devido à singularidade criada, levando a uma deterioração da solução numérica. Além disso, não há garantia de que as raízes características sejam reais, mesmo com a utilização da pressão de interface de BESTION (1990). Esta correlação foi proposta para aumentar os intervalos de valores das grandezas do escoamento que produzem raízes reais, mas não garante a hiperbolicidade para qualquer parâmetro de escoamento. Portanto, o modelo 4E1P é condicionalmente hiperbólico.

Avaliando o determinante e utilizando o termo de correção de pressão para escoamentos estratificados, conforme descrito na subseção 3.4.2, o seguinte polinômio característico é encontrado:

$$P_{4E1P}^{Pc}(\lambda) = \frac{\alpha_G \rho_G \alpha_L \rho_L}{c_G^2} \left[-\alpha_G (u_G - \lambda)^2 (u_L - \lambda)^2 + \frac{\alpha_G \Delta p_{I,L}}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\rho_G \alpha_L c_G^2}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \alpha_G c_G^2 (u_L - \lambda)^2 - \frac{\alpha_G \Delta p_{I,L} c_G^2}{\rho_L} \right]. \quad (3.52)$$

3.5.2 Polinômio característico para o modelo 5E2P

Para o modelo 5E2P o vetor das variáveis primitivas é escrito como:

$$\mathbf{W} = [\alpha_G \quad p_G \quad p_L \quad u_G \quad u_L]^T. \quad (3.53)$$

A matriz $(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A})$ associada ao modelo é:

$$\begin{bmatrix} (u_I - \lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_G (u_G - \lambda) & \frac{\alpha_G}{c_G^2} (u_G - \lambda) & 0 & \alpha_G \rho_G & 0 \\ -\rho_L (u_L - \lambda) & 0 & \frac{\alpha_L}{c_L^2} (u_L - \lambda) & 0 & \alpha_G \rho_G \\ \Delta p_{I,G} & \alpha_G & 0 & \alpha_G \rho_G (u_G - \lambda) & 0 \\ \Delta p_{I,L} & 0 & \alpha_L & 0 & \alpha_L \rho_L (u_L - \lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Expandindo o determinante, o seguinte polinômio característico é obtido:

$$P_{5E2P}(\lambda) = \frac{\alpha_G^2 \alpha_L^2 \rho_G \rho_L}{c_G^2 c_L^2} (u_I - \lambda) \left[(u_G - \lambda)^2 - c_G^2 \right] \left[(u_G - \lambda)^2 - c_L^2 \right]. \quad (3.55)$$

Para o modelo 5E2P as raízes do polinômio característico são triviais de serem encontradas, nos casos em que uma das frações volumétricas apresenta valores nulos, as raízes são indeterminadas, assim como no modelo 4E1P. A partir dessa condição, o modelo 5E2P apresenta sempre raízes reais e bem definidas, confirmando que o modelo é incondicionalmente hiperbólico. As raízes são dadas por; $\lambda_1 = u_I$, $\lambda_2 = u_G + c_G$, $\lambda_3 = u_G - c_G$, $\lambda_4 = u_L + c_L$ e $\lambda_5 = u_L - c_L$.

Vale ressaltar também que as raízes independem do modelo de pressão interfacial adotado, dando mais liberdade na escolha de novos modelos de pressão interfacial para o modelo 5E2P.

É intuitivo pensar que o modelo 5E2P se reduz ao modelo 4E1P quando aplicada a relaxação instantânea de pressão, já que nessa condição as pressões das duas fases se igualam, tornando a Eq. (3.9) singular. Porém na solução da parte hiperbólica do modelo, a relaxação não é considerada, garantindo que o modelo é incondicionalmente hiperbólico mesmo com a relaxação instantânea da pressão.

4. MÉTODO NUMÉRICO

Estabelecidos os modelos matemáticos que representam os escoamentos, apresentados no capítulo anterior, é necessária uma estratégia de solução que seja compatível com os modelos. Diversos métodos numéricos presentes na literatura geram soluções aproximadas para problemas envolvendo equações diferenciais parciais. Este capítulo descreve a estratégia de solução numérica que será utilizada para os problemas que descritos no próximo capítulo.

4.1 EQUAÇÕES NA FORMA CANÔNICA

A fim de se obter uma solução numérica aproximada, é feita a discretização das equações governantes no tempo e no espaço. Para melhor representar essa discretização, os modelos são reescritos na forma canônica de leis de conservação. Para isso, define-se que \mathbf{Q} é o vetor de variáveis conservadas, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ é o vetor de fluxo, \mathbf{W} é o vetor das variáveis primitivas representado pela Eq. (3.49) para o modelo 4E1P e pela Eq. (3.53) para o 5E2P, o qual pode ser expresso em termos de \mathbf{Q} e vice-versa, $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ e $\mathbf{N}(\mathbf{Q})$ são a matriz e o vetor que representam os termos não conservativos e $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$ é o vetor representativo do termo fonte. A expressão que representa os modelos 4E1P, Eq. (3.1) à (3.4), e 5E2P, Eq. (3.9) à Eq. (3.13), é então escrita na seguinte forma canônica

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \mathbf{S}. \quad (4.1)$$

4.1.1 Modelo 4E1P na forma canônica

Para o modelo 4E1P os vetores \mathbf{Q} , \mathbf{F} , \mathbf{N} , \mathbf{S} e a matriz \mathbf{H} são dados por:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G \\ \rho_L \alpha_L \\ \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \\ \rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G \Delta p_{I,G} \\ \rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L \Delta p_{I,L} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{N} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p - \Delta p_{I,G} \\ p - \Delta p_{I,L} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_L \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{fG} + T_I + T_{Gw} \\ B_{fL} - T_I + T_{Lw} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

4.1.2 Modelo 5E2P na forma canônica

Para o modelo 5E2P os vetores \mathbf{Q} , \mathbf{F} , \mathbf{N} , \mathbf{S} e a matriz \mathbf{H} são dados por:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_G \\ \rho_G \alpha_G \\ \rho_L \alpha_L \\ \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \\ \rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G \Delta p_{I,G} \\ \rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L \Delta p_{I,L} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{N} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_G \\ 0 \\ 0 \\ p - \Delta p_{I,G} \\ p - \Delta p_{I,L} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} u_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_L \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} r_p (p_G - p_L) \\ 0 \\ 0 \\ B_{fG} + T_I + T_{Gw} \\ B_{fL} - T_I + T_{Lw} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

4.2 MÉTODO NUMÉRICO E DISCRETIZAÇÃO

Como as equações governantes dos modelos, 4E1P e 5E2P são unidimensionais, é construída uma malha computacional com N células uniformes ao longo do domínio, sendo que cada célula possui um comprimento $\Delta x = L/N$, onde L é o comprimento total do domínio. O contador j é utilizado para numerar as células, de $j=1$ até $j=N$. A distância do centro de cada célula em relação à seção de entrada do domínio é dada por x_j e a fronteira entre células a montante e a jusante são dadas respectivamente por $x_{j-1/2} = (j-1)\Delta x$ e $x_{j+1/2} = j\Delta x$. Relacionando geometricamente esses parâmetros, identifica-se que $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, e que a posição do centro de uma célula específica é dada por $x_j = (j-1/2)\Delta x$.

Realizando a discretização, por diferenças finitas, das equações de conservação na forma canônica Eq. (4.1), utilizando um esquema explícito no tempo e isolando o termo

\mathbf{Q}_j^{n+1} , que representa a aproximação local de \mathbf{Q} na posição j e no instante de tempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, obtém-se a relação

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] + \Delta t \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)_j^n + \Delta t \mathbf{S}_j^n. \quad (4.12)$$

Vale ressaltar que $\mathbf{F}_{j-1/2}^n$ e $\mathbf{F}_{j+1/2}^n$ contabilizam os termo de fluxos respectivamente nas posições $x_{j-1/2}$ e $x_{j+1/2}$, no tempo t^n , podendo ser escritos como funções dos estados à direita e à esquerda da interface entre células adjacentes, ou seja,

$$\mathbf{F}_{j-1/2}^n = \mathbf{F}_{j-1/2}(\mathbf{Q}_{j-1}^n, \mathbf{Q}_j^n), \quad \mathbf{F}_{j+1/2}^n = \mathbf{F}_{j+1/2}(\mathbf{Q}_j^n, \mathbf{Q}_{j+1}^n). \quad (4.13)$$

Para um esquema explícito e de primeira ordem no tempo, deve-se usar a condição de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), para se garantir a estabilidade, do método de determinar o passo no tempo Δt . Essa condição segundo HIRSCH (1990) e TORO (1999) é expressa por

$$\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{\lambda_{\max}^n}. \quad (4.14)$$

O parâmetro CFL é um número positivo em que sua faixa depende do método utilizado, mas que geralmente possui valores menores ou iguais a 1. Para o FCT, método utilizado nesse trabalho, o CFL não deve ser maior que 0,5, como determinado por SOD (1985). O parâmetro λ_{\max}^n , que representa a maior velocidade de propagação da frente de onda em valores absolutos, é determinado pelo maior valor absoluto dos autovalores oriundos da análise de hiperbolicidade, dentre todas as células a cada instante de tempo, isto é,

$$\lambda_{\max}^n = \max_j \left[\max_i |\lambda_j^i| \right], \quad \text{para } j = 1, \dots, N \quad i = 1, \dots, N_{EQ}, \quad (4.15)$$

onde N_{EQ} é o número de equações do problema de valor inicial e de contorno. Para garantir a estabilidade da simulação pode-se utilizar um valor superestimado para λ_{\max}'' . Estimativas iniciais desses valores para o modelo 4E1P podem ser atribuídas a velocidade do som no gás. Para o modelo 5E2P uma boa estimativa inicial é atribuir λ_{\max}'' a velocidade do som no líquido em questão. Essas estimativas podem falhar caso a simulação obtenha valores de velocidades altas, mas servem como um bom parâmetro inicial.

4.2.1 Discretização do Termo de Fluxo Conservativo

Para discretização do termo de fluxo F , foi escolhido método numérico FCT, *Flux Corrected Transport*, originalmente proposto por BORIS E BOOK (1973) e BOOK *et al.* (1975). O método FCT é um método destinado à solução de problemas hiperbólicos, podendo resolver problemas que envolvam ondas de choque e descontinuidades. Esse método foi selecionado por não necessitar da solução do problema de Riemann, se demonstrando um método de simples aplicabilidade para diferentes problemas escritos na forma canônica de lei de conservação. FIGUEIREDO (2010) e BUENO (2013) compararam o FCT com outros métodos presentes na literatura e concluíram que, para os métodos estudados, o FCT apresenta menores efeitos dissipativos. Outra característica importante do FCT é a sua capacidade de balancear efeitos difusivos e dispersivos, o que é desejável já que métodos numéricos têm tendência a sofrer de um ou outro efeito em suas soluções, segundo ZALESK (1979). O FCT pode ser descrito conforme um esquema “preditor/corretor” em que difusão é introduzida na fase preditora e a anti-difusão (ou dispersão) é introduzida na fase corretora, como é apresentado em SONDERMANN *et al.* (2015) e FIGUEIREDO *et al.* (2017).

O FCT foi utilizado para diversas simulações em gasodutos bifásicos em regime estratificado por BUENO (2013), BUENO *et al.* (2014), SONDERMANN (2016), FIGUEIREDO (2016) e PATRICIO (2016). Para essa finalidade o FCT apresentou resultados acurados para as variáveis de interesse nesse tipo de escoamento. No trabalho de FIGUEIREDO *et al.* (2012) foi verificado o grau de acurácia do FCT para problemas de escoamento estratificado em gasodutos, onde observou-se que o método é de primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço.

Os passos para o cálculo do vetor de fluxo discretizado, pelo FCT na interface entre células conforme apresentado na Eq. (4.13), pode ser escrito como se segue (ESSAMA 2004, FLETCHER 1988, e HIRSCH 1990).

1. Primeira aproximação do vetor de variáveis conservadas, $\tilde{\mathbf{Q}}_j$, através do esquema de Ritchmyer, como detalhado em TORO (1999):

Primeiramente o vetor de solução intermediário $\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}$ é obtido por

$$\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{j+1}^n + \mathbf{Q}_j^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j^n)]. \quad (4.16)$$

Em seguida é calculado o vetor fluxo de Ritchmyer $\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}}$ conforme

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{Q}}_{j+1/2}). \quad (4.17)$$

Finalmente obtém-se que

$$\tilde{\mathbf{Q}}_j = \mathbf{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}^{\text{RI}}). \quad (4.18)$$

2. Geração de fluxos difusivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{d}} = \nu_{j+1/2} (\mathbf{Q}_{j+1}^n - \mathbf{Q}_j^n), \quad (4.19)$$

onde $\nu_{j+1/2}$ é o coeficiente difusivo.

3. Difusão da solução:

$$\mathbf{Q}_j^{\text{d}} = \tilde{\mathbf{Q}}_j + (\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{d}} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{\text{d}}). \quad (4.20)$$

4. Geração de fluxos dispersivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{ad}} = \mu_{j+1/2} (\tilde{\mathbf{Q}}_{j+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_j). \quad (4.21)$$

onde $\mu_{j+1/2}$ é o coeficiente dispersivo.

5. Cálculo da primeira diferença de \mathbf{Q}_j^{d} :

$$\Delta \mathbf{Q}_{j+1/2}^{\text{d}} = \mathbf{Q}_{j+1}^{\text{d}} - \mathbf{Q}_j^{\text{d}}. \quad (4.22)$$

6. Limitação dos fluxos dispersivos:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{cad}} = S \max \left[0, \min \left[S \Delta \mathbf{Q}_{j-1/2}^{\text{d}}, \left| \mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{ad}} \right|, S \Delta \mathbf{Q}_{j+3/2}^{\text{d}} \right] \right], \quad (4.23)$$

onde,

$$S = \text{sgn} \mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{ad}}. \quad (4.24)$$

7. Geração do fluxo na fronteira entre as células $\mathbf{F}_{j+1/2}^n$:

$$\mathbf{F}_{j+1/2}^n = \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{FCT}} = \hat{\mathbf{F}}_{j+1/2}^{\text{RI}} + \frac{\Delta x}{\Delta t^n} (\mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{cad}} - \mathbf{F}_{j+1/2}^{\text{d}}). \quad (4.25)$$

Os valores dos coeficientes difusivos e anti-difusivos são estimados de forma variada na literatura. A recomendação é de sempre minimizar os efeitos dispersivos em uma simulação, como apontado por BORIS E BOOK (1976). LEZEAU E THOMPSON (1998) e XIAO (1991) estimam, a fim de minimizar os erros difusivos e dispersivos, os coeficientes como constantes de valores $\mu_{j+1/2} = 0,125$ e $\nu_{j+1/2} = 0,125$. Já ESSAMA (2004) explora outros valores de coeficientes de difusão em suas simulações, quando utilizado o FCT. FLETCHER (1988) apresenta uma correlação geral para a obtenção dos valores dos coeficientes, segundo as relações

$$\nu_{j+1/2} = \eta_0 + \eta_1 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{\max, j+1/2} \right)^2, \quad (4.26)$$

$$\mu_{j+1/2} = \eta_0 + \eta_2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{\max, j+1/2} \right)^2, \quad (4.27)$$

em que η_0 , η_1 e η_2 são constantes que podem ser estimadas a fim de minimizar os erros de difusão e dispersão. Os valores tipicamente usados, segundo FLETCHER (1988), são $\eta_0 = 1/3$, $\eta_1 = 1/6$ e $\eta_2 = -1/6$. O valor $\lambda_{\max, j+1/2}$ é calculado pela média aritmética dos valores a montante e a jusante, $\lambda_{\max, j+1/2} = 0,5(\lambda_{\max, j} + \lambda_{\max, j+1})$.

4.2.2 Discretização do Termo de Fluxo Não Conservativo

O esquema Minmod proposto por HARTEN (1983) discretiza o termo não conservativo que aparece na Eq. (4.1). O esquema já foi utilizado anteriormente por ESSAMA (2004), BUENO (2013), SONDERMANN (2016) e FIGUEIREDO *et al.* (2017) com esta finalidade. O Minmod nesse caso pode ser descrito como:

$$\left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\mathbf{H}_j^n}{\Delta x} \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (4.28)$$

A função que define o vetor $\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ é:

$$\begin{cases} m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv s \cdot \min[|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|, |\mathbf{z}|], & \text{se } \text{sgn}(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{y}) = \text{sgn}(\mathbf{z}) = s \\ m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0, & \text{se } \text{sgn}(\mathbf{x}) \neq \text{sgn}(\mathbf{y}) \neq \text{sgn}(\mathbf{z}) \end{cases}, \quad (4.29)$$

onde:

$$\mathbf{x} \equiv 2(\mathbf{N}_{j+1}^n - \mathbf{N}_j^n), \mathbf{y} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{N}_{j+1}^n - \mathbf{N}_{j-1}^n), \mathbf{z} \equiv 2(\mathbf{N}_j^n - \mathbf{N}_{j-1}^n). \quad (4.30)$$

em que o valor de m é calculado para cada componente do vetor \mathbf{m} .

4.2.3 Imposição das Condições de Contorno

Para os problemas de condição inicial e de contorno, como os problemas de escoamentos estratificado em gasodutos, a determinação do número de condições de contorno a serem especificados em cada contorno é de grande importância para a solução numérica. Em geral é feita uma análise de hiperbolicidade para os modelos e são calculadas as características. O número de condições de contorno prescritas em cada extremidade do domínio unidimensional é determinado em função do número de características que emanam do contorno para dentro do domínio (JEFFREY, 1976). Neste trabalho, as condições de contorno são impostas em células fantasmas (*ghost cells*) na entrada, $j=0$, e na saída, $(j=N+1)$, do domínio.

Para a maioria dos problemas de condição inicial e de contorno, o modelo 5E2P apresenta dois autovalores negativos e três autovalores positivos. Nesses casos, são utilizadas duas condições de contorno na saída e três na entrada. Apenas em poucos casos em que existe fluxo em contracorrente, os autovalores relativos às velocidades de interface ficam negativos, o que requer três condições de contorno na saída, correspondendo aos três autovalores negativos, e dois na entrada. Além dessas possibilidades os escoamentos seriam supersônicos e as equações governantes do modelo não seriam aplicáveis.

Para os problemas de condição inicial e de contorno resolvidos com o modelo 4E1P a imposição das condições de contorno é mais complicada, dependendo da determinação das raízes do polinômio característico pela análise de hiperbolicidade do problema.

O procedimento do FCT necessita de algumas alterações necessárias para o cálculo específico dos fluxos próximos ao contorno. Nesses casos, os procedimentos 1, 3 e 6 do cálculo do FCT, descritos na seção 4.2.1 deste capítulo, são modificados da seguinte maneira para os contornos:

- Procedimento 1: Aproximação inicial de $\tilde{\mathbf{Q}}_J$:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{Q}_0^n, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{N+1} = \mathbf{Q}_{N+1}^n. \quad (4.31)$$

- Procedimento 3: Difusão da solução:

$$\mathbf{Q}_0^d = \tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{Q}_0^n, \quad \mathbf{Q}_{N+1}^d = \tilde{\mathbf{Q}}_{N+1} = \mathbf{Q}_{N+1}^n. \quad (4.32)$$

- Procedimento 6: Limitação dos fluxos dispersivos:

$$\mathbf{F}_{1/2}^{cad} = S \max \left[0, \min \left[\left| \mathbf{F}_{1/2}^{ad} \right|, S \Delta \mathbf{Q}_{3/2}^d \right] \right], \quad (4.33)$$

$$\mathbf{F}_{N+1/2}^{cad} = S \max \left[0, \min \left[S \Delta \mathbf{Q}_{N-1/2}^d, \left| \mathbf{F}_{N+1/2}^{ad} \right| \right] \right]. \quad (4.34)$$

A condição inicial é imposta estendendo-se os valores das condições de contorno para o interior do duto em $t=0$.

4.2.4 Critério de Convergência

O critério de convergência utilizado para as simulações atingirem o regime permanente é determinado por:

$$\max \xi(\chi_i^n)_j \leq 10^{-6}, \quad (4.35)$$

$$\xi(\chi_i^n)_j = \frac{\left| (\chi_i^{n+1})_j - (\chi_i^n)_j \right|}{\max \left\{ 1, \left| (\chi_i^n)_j \right| \right\}}, \quad (4.36)$$

onde $(\chi_i^n)_j$ é uma variável dependente do problema podendo assumir os seguintes valores, para o modelo 4E1P:

$$j \in \{2, N-1\}, n \in \{1, 2, 3, \dots\}, i \in \{1, \dots, N_{EQ}\} \text{ onde: } i = \begin{cases} 1 \rightarrow p \\ 2 \rightarrow \alpha_G \\ 3 \rightarrow u_G \\ 4 \rightarrow u_L \end{cases}, \quad (4.37)$$

e para o modelo 5E2P:

$$j \in \{2, N-1\}, n \in \{1, 2, 3, \dots\}, i \in \{1, \dots, N_{EQ}\} \text{ onde: } i = \begin{cases} 1 \rightarrow \alpha_G \\ 2 \rightarrow p_G \\ 3 \rightarrow p_L \\ 4 \rightarrow u_G \\ 5 \rightarrow u_L \end{cases}. \quad (4.38)$$

A variável n representa os passos no tempo, a variável j as células no espaço de discretização e a variável i são as variáveis dependentes do escoamento determinados pelo vetor de variáveis primitivas, \mathbf{W} , apresentado no início deste capítulo.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo são apresentados os resultados obtidos com os modelos, 4E1P e 5E2P, utilizando o método numérico FCT. Os modelos foram comparados entre si utilizando resultados de aplicação em problemas *benchmarks* clássicos e em gasodutos reais de engenharia. Além da comparação entre modelos, esse capítulo tem como objetivo adicional identificar uma estratégia de solução ao se utilizar o método numérico FTC em diferentes problemas.

5.1 ESCOAMENTO DOMINADO PELA GRAVIDADE (*WATER FAUCET*)

O problema *benchmark* denominado *water faucet* é descrito em RAMSON (1987) e também denominado por RAMSON (1984) como escoamento dominado pela gravidade (*gravity dominated flow*). Este é um problema típico na literatura para avaliação de modelos matemáticos e métodos numéricos na resolução de escoamentos bifásicos unidimensionais, que foi estudado nos trabalhos de TRAPP E RIEMKE (1986), QUIN (1992), COQUEL *et al.* (1997), SAUREL E ABGRALL (1999), PAILLÈRE *et al.* (2003), EVJE E FLÅTTEN (2003), ESSAMA (2004), GUILLARD E DUVAL (2007), MUNKEJORD *et al.* (2009), MUNKEJORD (2007, 2010) e ANSARI E DARAMIZADEH (2012). O *water faucet* foi escolhido por possuir uma solução analítica conhecida, podendo assim ser usado como problema de validação dos modelos matemáticos e método numérico em questão.

O *water faucet* é um problema conceitual de valor inicial e de contorno que pode ser caracterizado inicialmente por possuir um campo de escoamento sem influência da gravidade, onde a fase de gás é estática e o líquido possui velocidade uniforme ao longo do domínio. O problema que pode ser interpretado como um tubo por onde entra líquido em uma extremidade sendo que a outra está aberta. A influência da gravidade é, então, introduzida na direção e sentido da velocidade do líquido, e o campo de escoamento começa a evoluir. Não é empregado nenhum tipo de arrasto, de interface ou na parede, durante a simulação, nem relaxação de velocidade. As condições de contorno são impostas com os mesmos valores dos parâmetros iniciais, de forma que as velocidades, $(u_k)_{x=0}$, e a fração volumétrica, $(\alpha_G)_{x=0}$, são impostas na entrada e as pressões são impostas na saída, $(p=p_G=p_L)_{x=L}$. Para a solução analítica, a variação da pressão do escoamento é

negligenciada, mas como a variação esperada é mínima a solução analítica serve como um ótimo parâmetro para comparação gráfica. A solução analítica, segundo COQUEL *et al.* (1997) é:

$$\alpha_G(x,t) = \begin{cases} 1 - \frac{(\alpha_G u_L)_{x=0}}{\sqrt{2gx + (u_L^2)_{x=0}}}, & \text{se } x \leq (u_L)_{x=0} + \frac{1}{2}gt^2 \\ 1 - (\alpha_L)_{x=0}, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad (5.1)$$

$$u_L(x,t) = \begin{cases} \sqrt{(u_L^2)_{x=0} + 2gx}, & \text{se } x \leq (u_L)_{x=0} + \frac{1}{2}gt^2 \\ (u_L)_{x=0} + gt, & \text{caso contrário.} \end{cases}. \quad (5.2)$$

A Figura 5.1, representa um esboço da evolução do escoamento no tempo. Percebe-se na solução analítica que a fração volumétrica apresenta uma descontinuidade crescente, até que se atinja o regime permanente. O *water faucet* é um caso teste interessante para analisar a capacidade dos modelos numéricos de capturar e transportar descontinuidades na fração volumétrica, devido a interação entre as forças de corpo e os termos convectivos e advectivos nas equações de conservação.

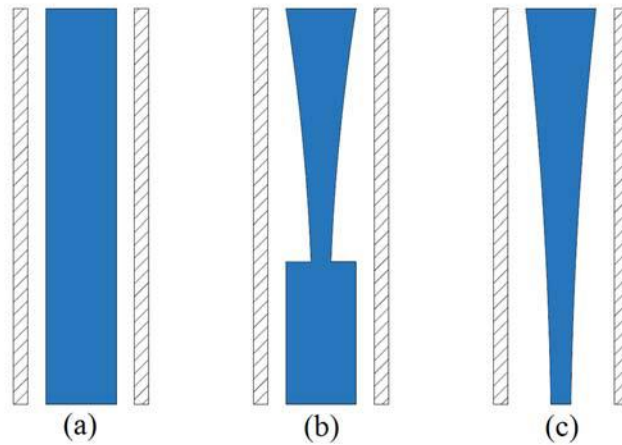


Figura 5.1: Representação da evolução ao longo do tempo do escoamento para o problema *water faucet*. (a) Campo de escoamento uniforme inicial. (b) Campo de escoamento dado um tempo $t = t_o + \Delta t$. (c) Regime permanente.

As constantes utilizadas para o caso *water faucet* são apresentadas na Tabela 5.1. Para a fase líquida considera-se a água como fluido e, para a fase gás, o ar. A velocidade de propagação de onda no líquido é considerada a velocidade do som no líquido, já para o gás é utilizada a Eq. (3.8). Os valores iniciais e das condições de contorno são apresentados na Tabela 5.2, lembrando que para o *water faucet*, os valores das condições iniciais e de contorno são os mesmos. Nessa mesma tabela são apresentadas as posições das condições de contorno. No modelo 5E2P a pressão, p , apresentada na Tabela 5.2 representa os valores das pressões de gás e líquido, em que $p=p_G=p_L$, já que para as simulações do *water faucet* será utilizada a relaxação instantânea da pressão. Em todas as simulações é utilizado um valor de CFL=0,45 e os resultados são dados para o tempo $t=0,6s$. A fim de utilizar um passo de tempo constante durante toda a simulação, utilizou-se um valor de $\lambda_{\max}^n = 400m/s$ para o modelo 4E1P, e $\lambda_{\max}^n = 1600m/s$ para o modelo 5E2P. Esses valores foram estimados tendo em mente que os autovalores máximos durante a simulação não devem superá-los, caso contrário a simulação é interrompida.

Tabela 5.1: Constantes para o caso teste *water faucet*.

Constante	Símbolo	Valor
Gravidade	g (m/s ²)	9,81
Vel. de propagação de onda no líquido	c_L (m/s)	1480
Massa específica de referência - gás	ρ^o_G (kg/m ³)	0
Massa específica de referência - líq.	ρ^o_L (kg/m ³)	1000
Temperatura	T (°C)	20
Constante do gás	R (J/kg K)	287
Comprimento do domínio	L (m)	12

Tabela 5.2: Condições iniciais e de contorno para o caso *water faucet*.

Variável	Posição da condição de contorno	Valor
p (Pa)	Saída: $x=L$	10^5
u_G (m/s)	Entrada: $x=0$	0
u_L (m/s)	Entrada: $x=0$	10
α_G (-)	Entrada: $x=0$	0,2

5.1.1 Estudo de malha para o modelo 4E1P

Primeiramente foi feito um estudo de malha para o modelo 4E1P, utilizando os esquemas das Eq. (4.26) e Eq. (4.27) para o cálculo do coeficiente difusivos e dispersivos do FCT. As curvas da Figura 5.2 e da Figura 5.3 representam o refinamento da malha de 250 até 10000 células para os gráficos da fração volumétrica de gás e da velocidade do líquido ao longo do domínio, respectivamente. Como esperado, com o refinamento as soluções se aproximam da solução analítica, tanto na representação da descontinuidade, como na aproximação da magnitude das grandezas.

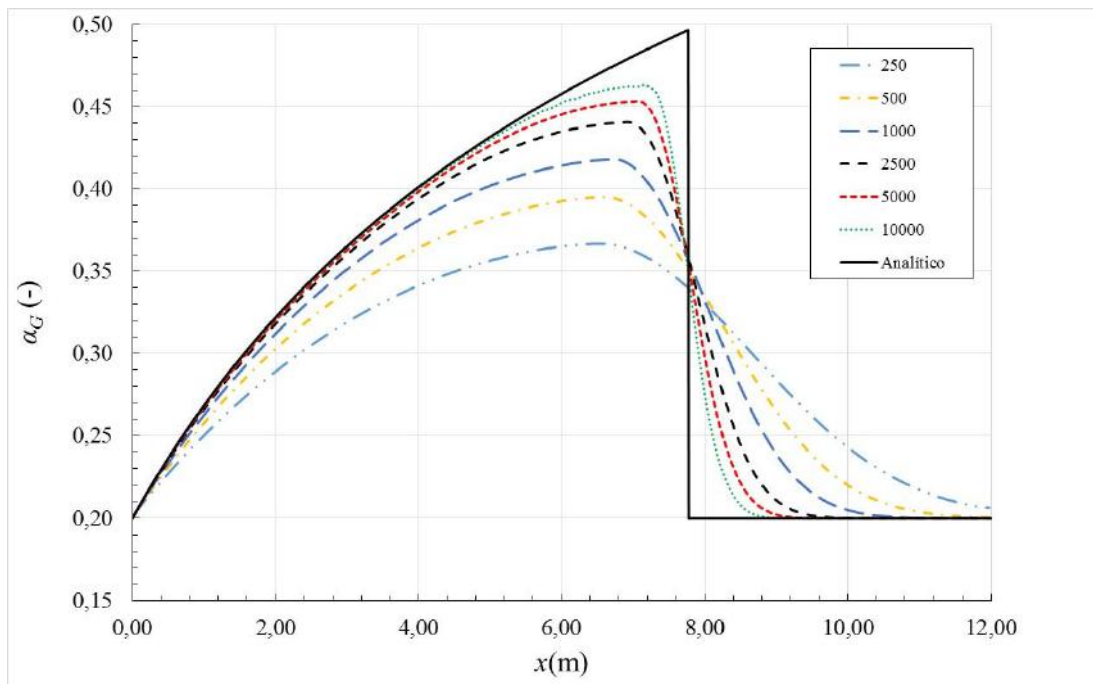


Figura 5.2: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.

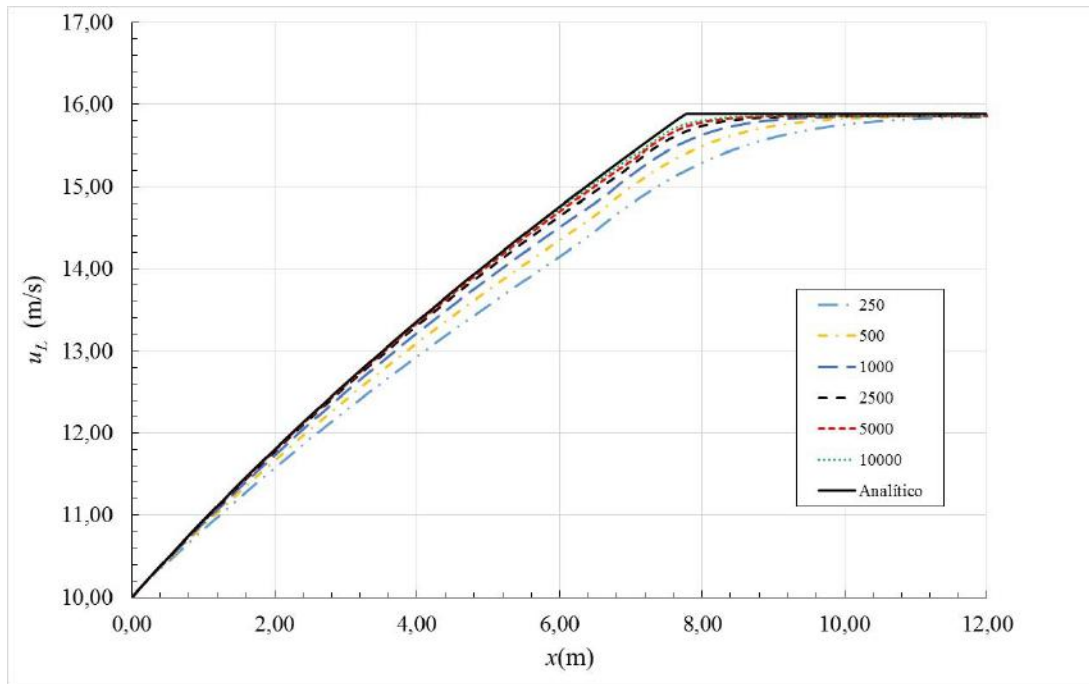


Figura 5.3: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.

A Figura 5.4 e a Figura 5.5 representam graficamente o mesmo estudo do efeito do refinamento de malha para o modelo 4E1P sobre a velocidade de gás e a pressão ao longo do domínio. Embora uma solução analítica não esteja disponível para essas grandezas, é esperado que o gás entre pela saída do e que o mesmo se acomode na região anterior à descontinuidade de fração volumétrica a fim de respeitar os princípios de conservação de massa. Para o gráfico da pressão é esperado que haja pequenas variações de pressão. Em ambos os gráficos os efeitos esperados foram observados tanto do ponto de vista físico quanto do refinamento da malha.

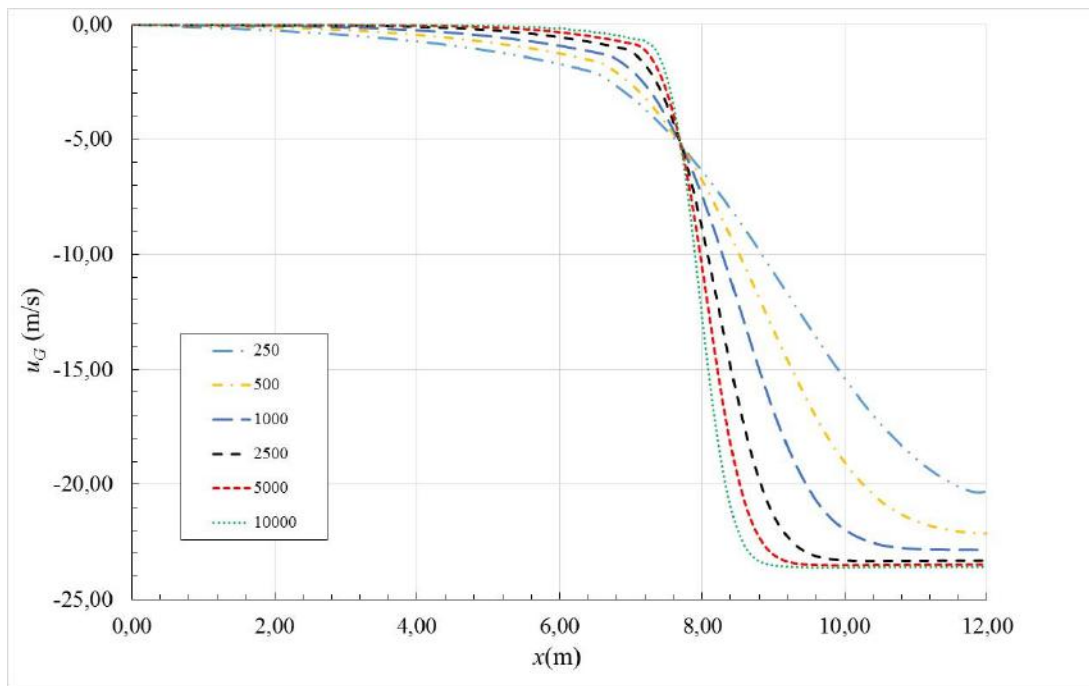


Figura 5.4: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.

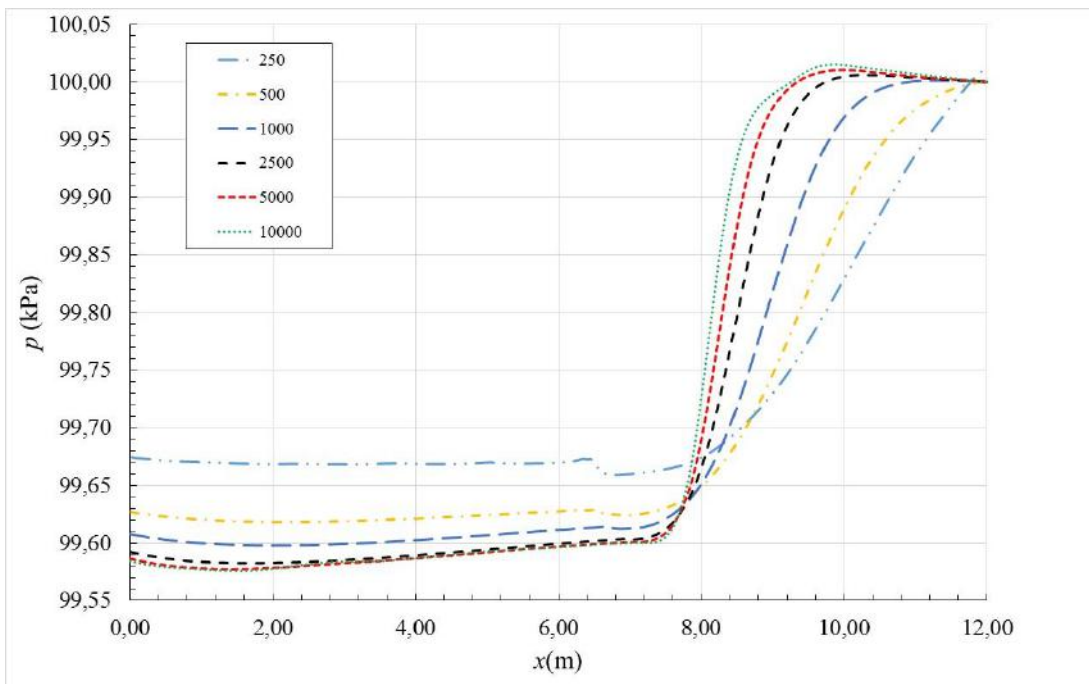


Figura 5.5: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o número de células de discretização.

5.1.2 Estudo de malha para o modelo 5E2P

Para o modelo 5E2P foi utilizada a condição de relaxação instantânea de pressão, e os esquemas descritos pelas equações Eq. (4.26) e Eq. (4.27) para o cálculo do coeficiente difusivos e dispersivos do FCT, a fim de aproximar os modelos. As curvas da Figura 5.6 e da Figura 5.7 representam o estudo do refinamento de malha para a fração volumétrica e para a velocidade do líquido, respectivamente. O refinamento produziu o mesmo efeito visto no modelo 4E1P, aproximando as curvas da solução analítica com o refinamento da malha.

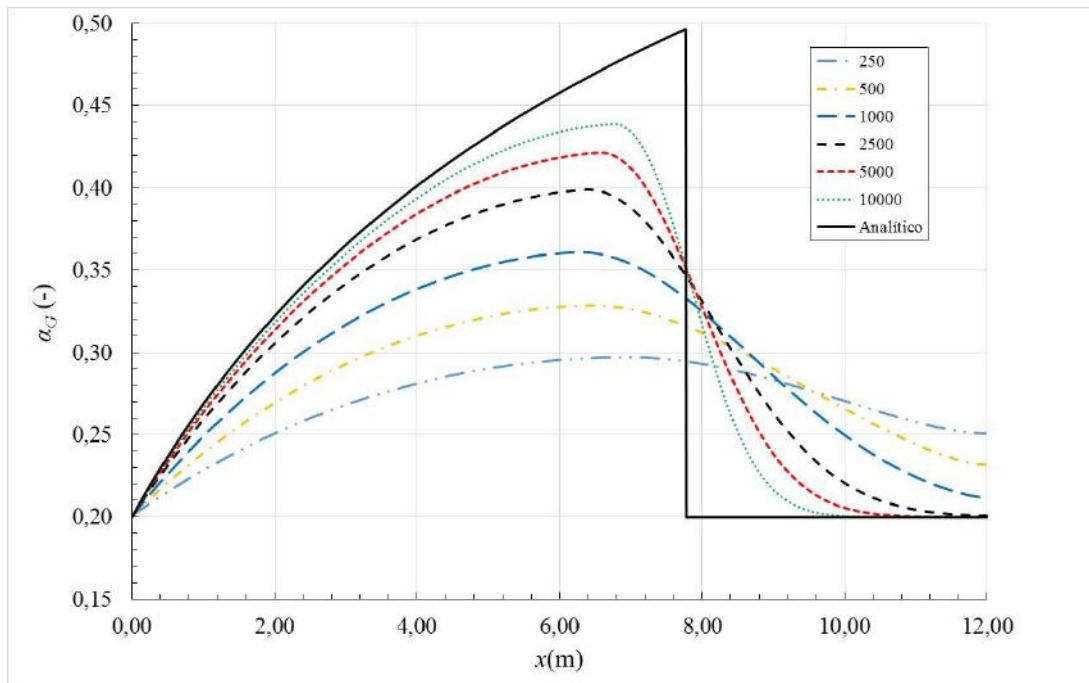


Figura 5.6: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6$ s para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.

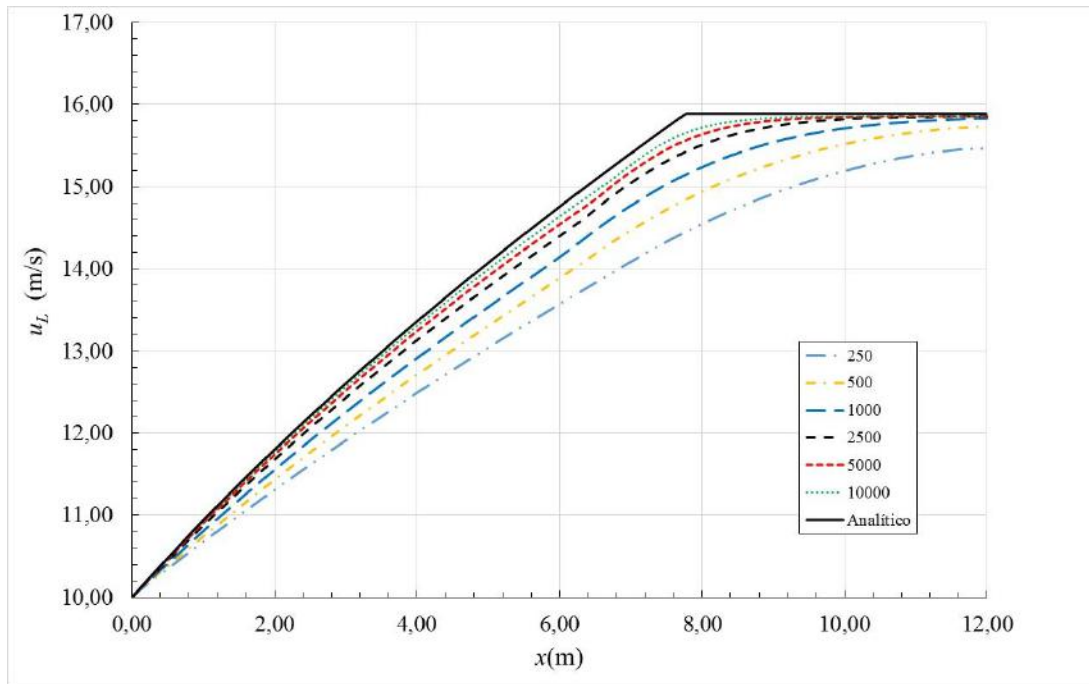


Figura 5.7: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.

A Figura 5.8 e a Figura 5.9 são as representações gráficas da velocidade do gás e da pressão respectivamente. Assim como nos gráficos para o modelo 4E1P o refinamento da malha aproximou a solução numérica do comportamento esperado, tanto para a velocidade do gás quanto para a pressão.

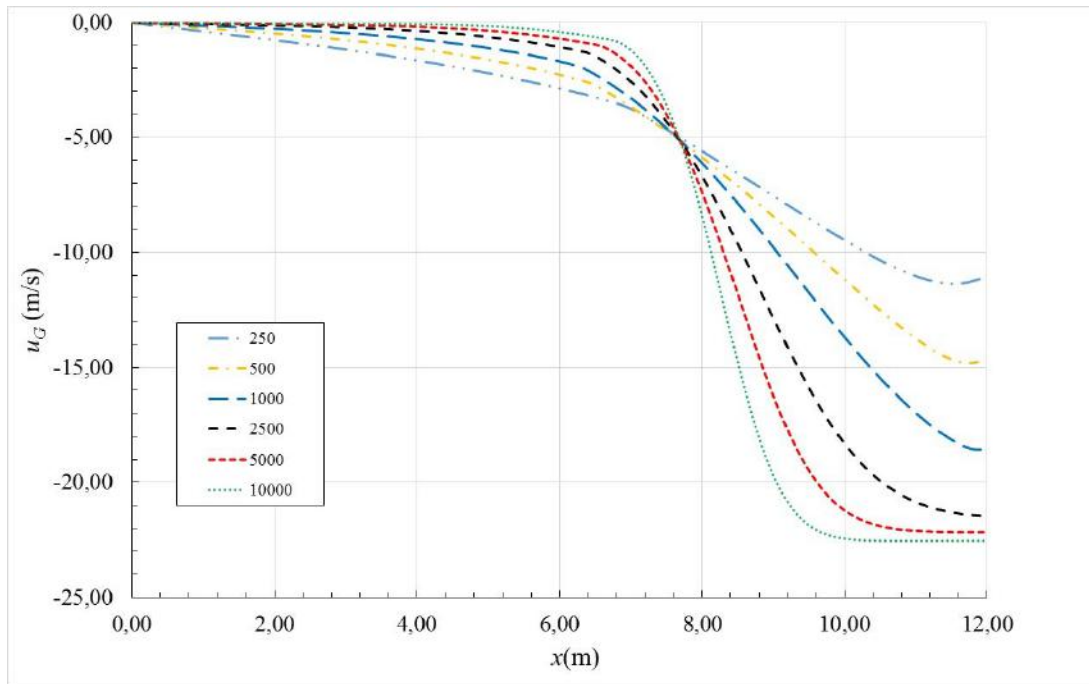


Figura 5.8: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.

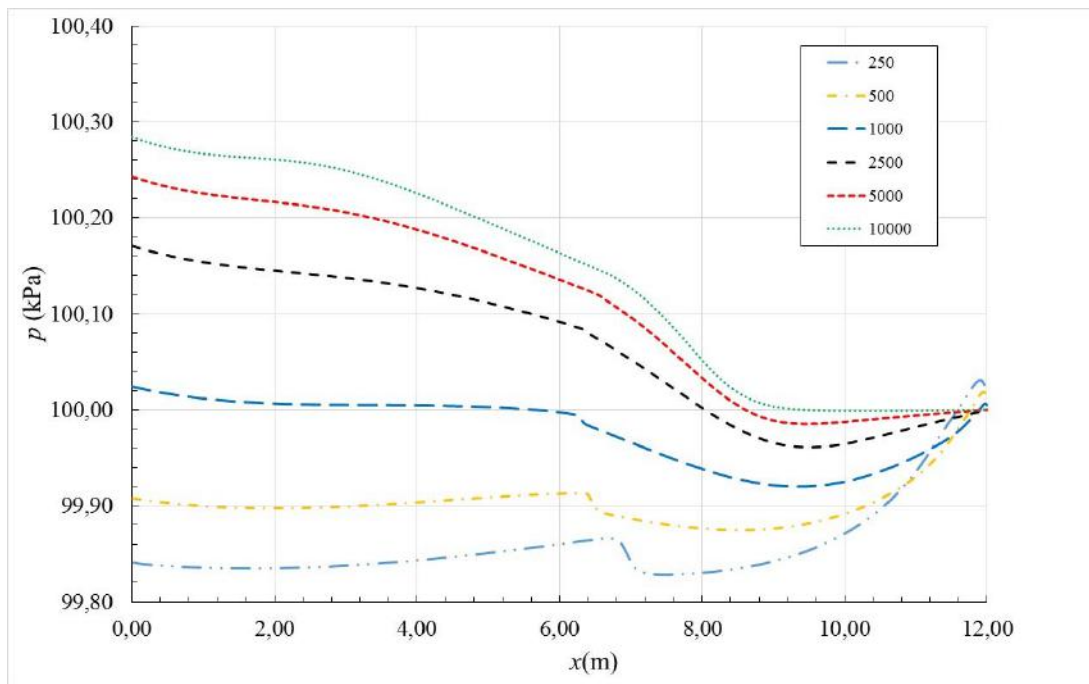


Figura 5.9: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o número de células de discretização.

Foi observado no estudo de malha que a solução numérica para o modelo 5E2P é mais difusiva quando comparada à solução do modelo 4E1P, e necessita de uma malha

mais refinada para obter os mesmos resultados do modelo 4E1P. Segundo MUNKEJORD (2010) isso se dá devido à introdução do passo de relaxação de pressão do modelo 5E2P. Esse autor também conclui que, com o refinamento da malha, o modelo 5E2P com relaxação de pressão converge para o modelo 4E1P, o que é visível nos gráficos de fração volumétrica e das velocidades, embora este comportamento não seja observado no gráfico da pressão. Esse fato também foi notado por MUNKEJORD (2010), em suas simulações com modelo 5E2P do problema *water faucet*. Como os efeitos de pressão não são dominantes nesse problema, não foi julgado necessário um maior refinamento da simulação no modelo 5E2P para capturar os efeitos obtidos no 4E1P.

5.1.3 Estudo dos coeficientes difusivo e dispersivo do FCT

Como mostrado nos estudos anteriores, os resultados para o modelo 5E2P, principalmente, apresentam difusão numérica. O método numérico FCT possui como característica o balanço entre os efeitos difusivos e dispersivos, controlados pelos coeficientes de difusão, ν , e dispersão, μ . Desta forma, foi feito um estudo para identificar qual combinação de valores reduzem os efeitos difusivos do método quando comparados à solução analítica. Foi escolhida uma malha de 2500 células para esse estudo. Os resultados obtidos com os coeficientes que variam dinamicamente durante a simulação, de acordo com a Eq. (4.26) e Eq. (4.27), são denotados nas legendas dos gráficos como μ e ν calculados. Inicialmente são escolhidos os valores $\nu=\mu=0,125$ dos coeficientes, conforme a recomendação de LEZEAU E THOMPSON (1998) e XIAO (1991). Como os resultados iniciais utilizando esses coeficientes recomendados observa-se dispersão, somente o valor do coeficiente difusivo é estudado a fim de se aumentar os efeitos difusivos e suavizar a solução numérica.

Os gráficos da Figura 5.10 e da Figura 5.11 mostram o efeito do aumento do coeficiente difusivo de 0,125 até 0,195 sobre a curva de fração volumétrica de gás para os modelos 4E1P e 5E2P, respectivamente. Para o modelo 4E1P, é notado que há pouca variação quanto à aproximação para a curva analítica com a variação do coeficiente difusivo, mas pode ser notado que os efeitos dispersivos estão presentes para os coeficientes $\nu=0,125$, $\nu=0,135$ e de forma muito suave para $\nu=0,155$. Para o modelo 5E2P os efeitos dispersivos só se apresentam nas curvas relativas à $\nu=0,125$, e uma maior influência desses coeficientes na melhora de resultados pode ser notada.

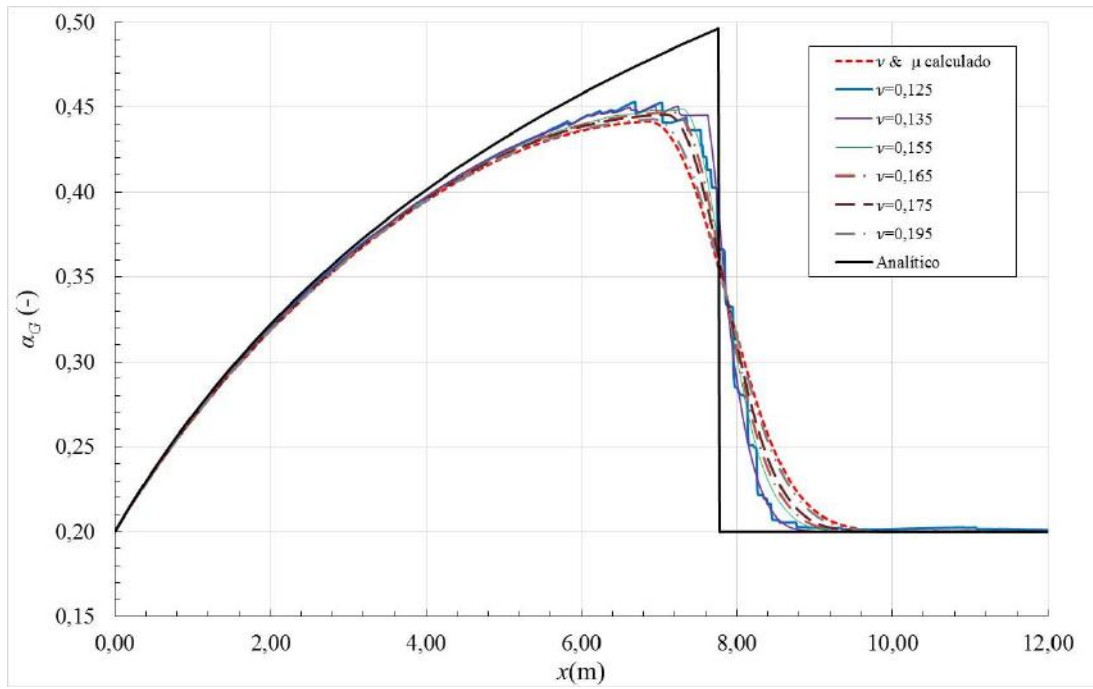


Figura 5.10: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.

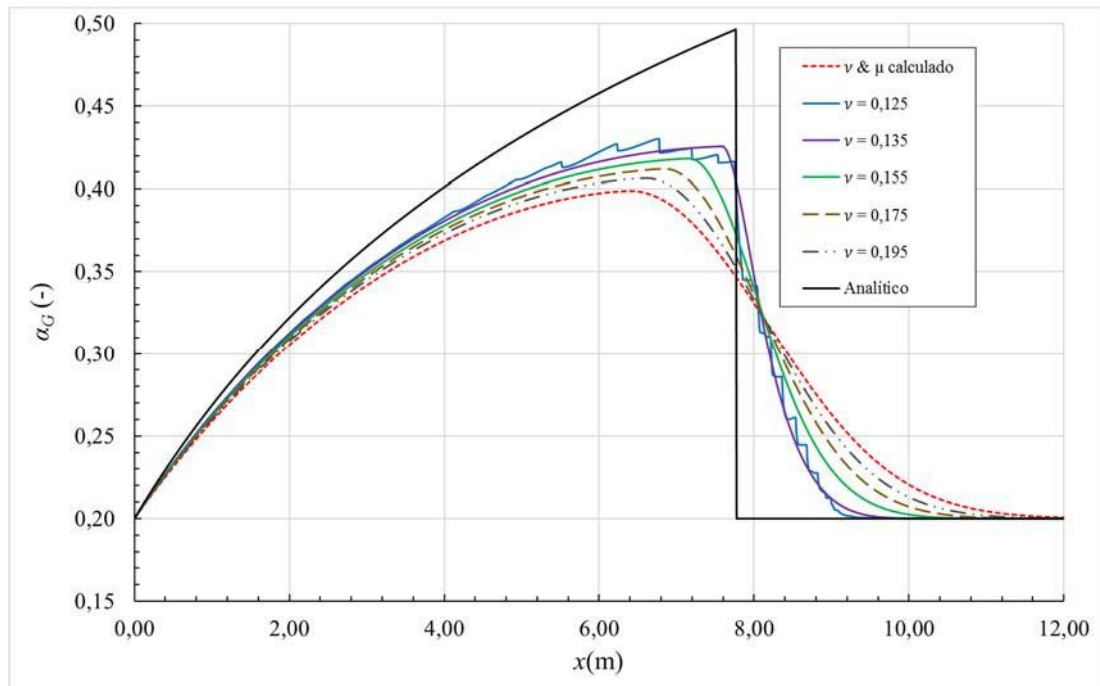


Figura 5.11: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.

Para as velocidades de líquido pouca variação é encontrada com a mudança dos coeficientes, como mostrado na Figura 5.12, para o modelo 4E1P, e na Figura 5.13, para o modelo 5E2P, mas os efeitos dispersivos se encontram presentes para os mesmos coeficientes relativos aos gráficos da fração volumétrica.

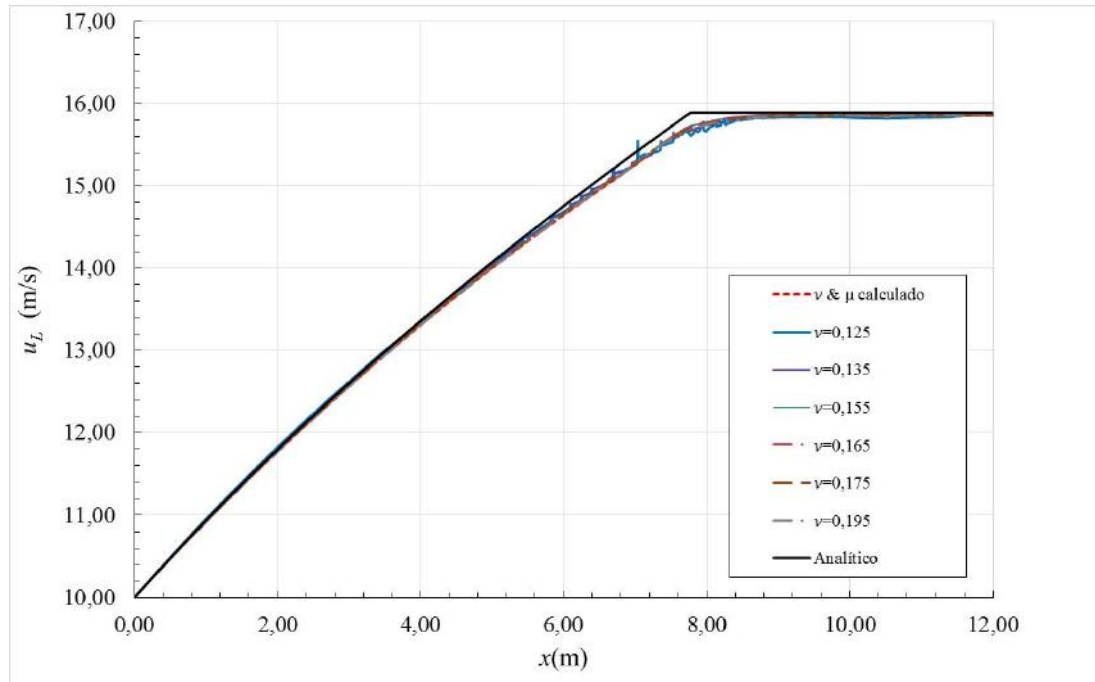


Figura 5.12: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.

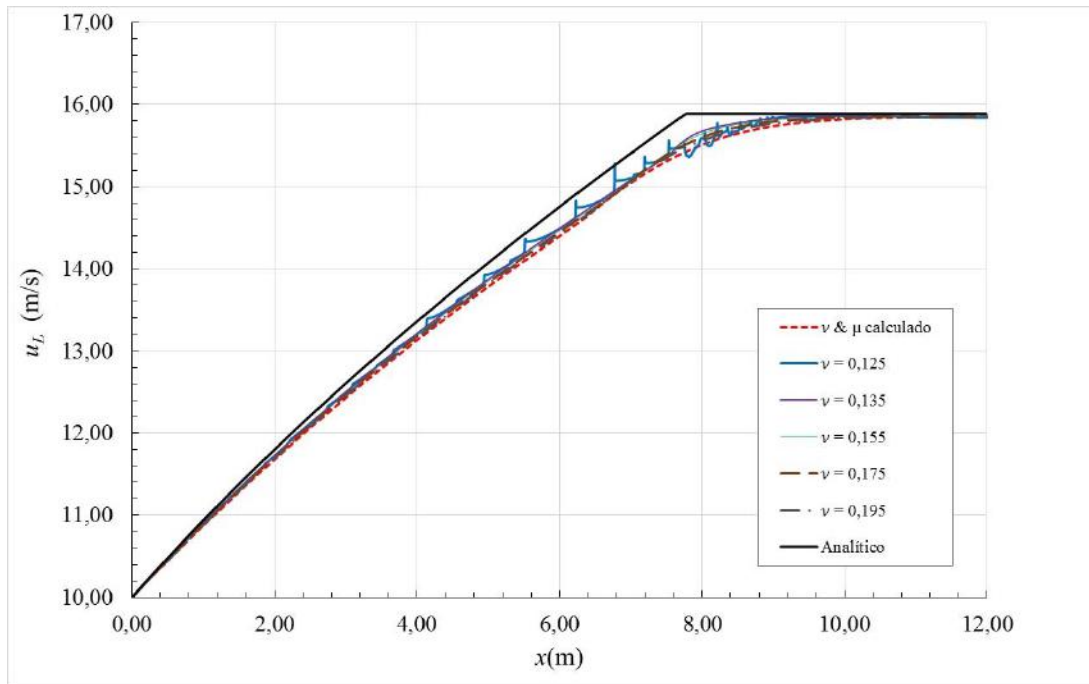


Figura 5.13: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.

Já para os gráficos de velocidade de gás, Figura 5.14 e Figura 5.15, é notada uma sensibilidade maior quanto à dispersão numérica, apresentando resultados com fortes instabilidades para os coeficientes $\nu=0,125$, $\nu=0,135$ e $\nu=0,155$ para o modelo 4E1P, e para $\nu=0,125$ para o modelo 5E2P.

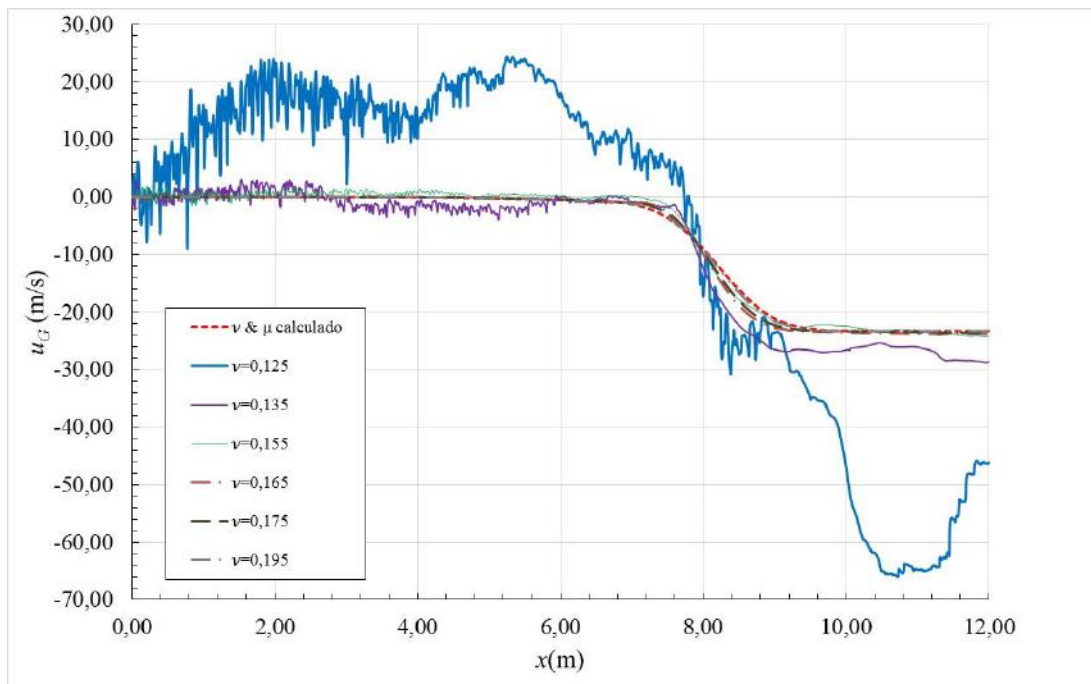


Figura 5.14: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.

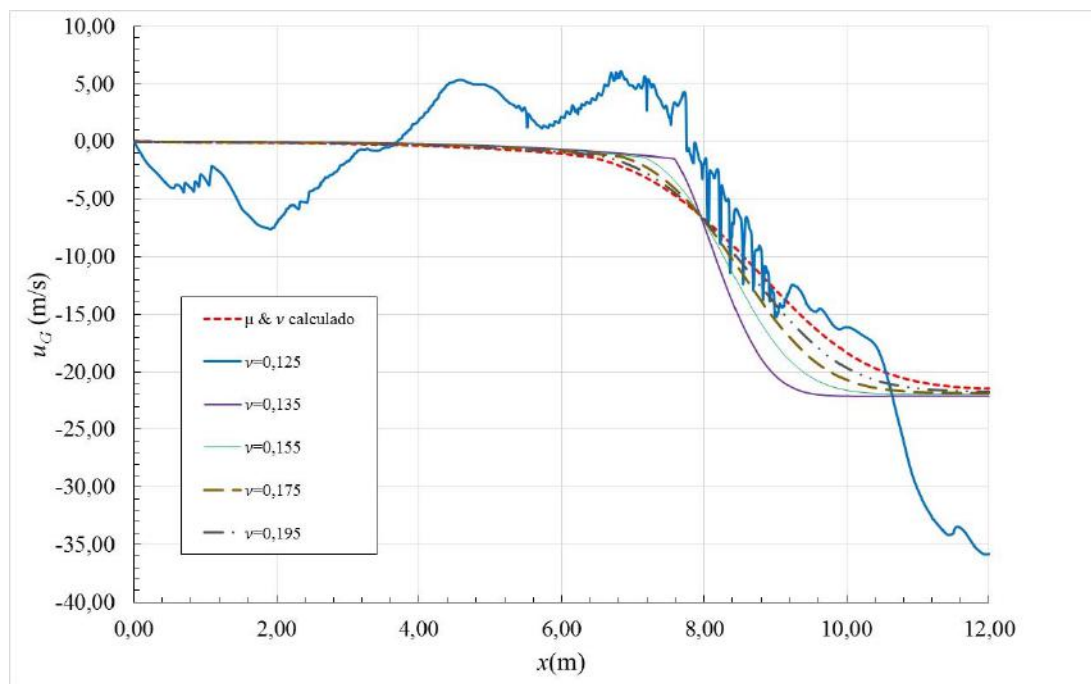


Figura 5.15: Distribuição de velocidade de gás ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.

A pressão demonstra ser a variável mais sensível quanto a dispersão numérica, conforme mostrado na Figura 5.16 e na Figura 5.17 para o modelo 4E1P, e na Figura 5.18 e na Figura 5.19 para o modelo 5E2P.

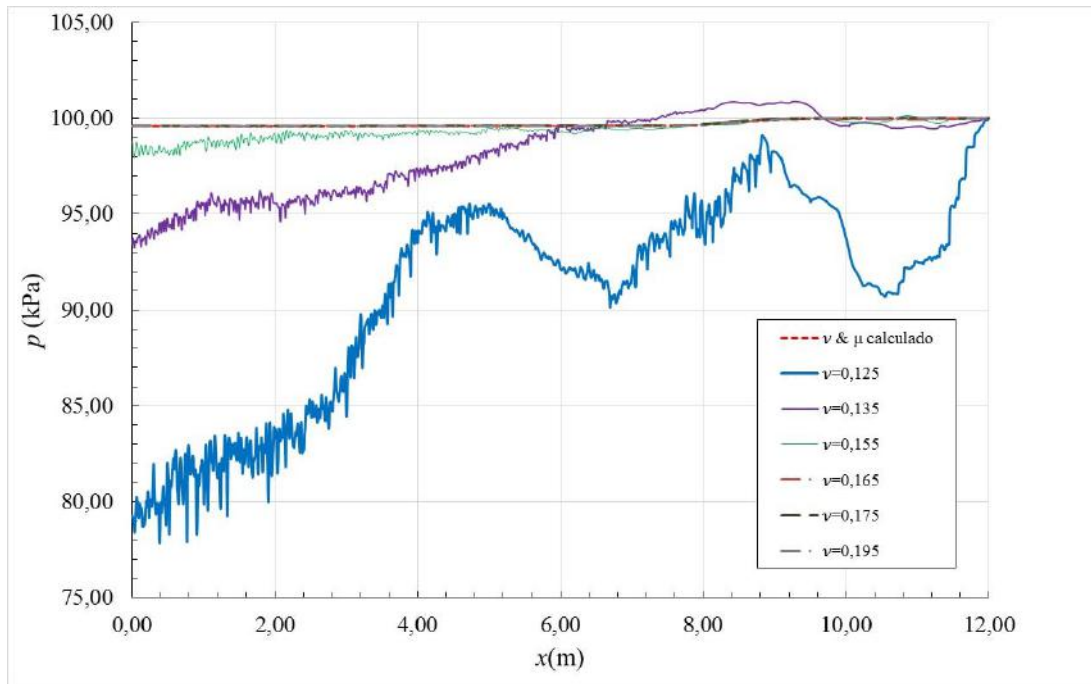


Figura 5.16: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6$ s para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo.

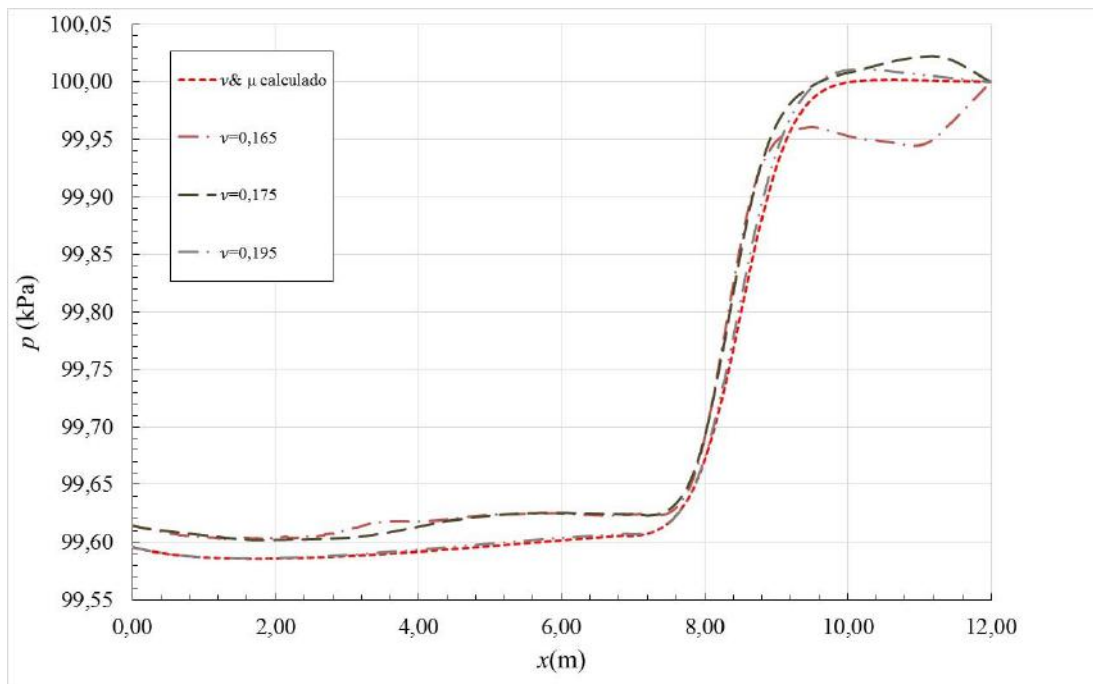


Figura 5.17: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 4E1P variando o coeficiente difusivo, eliminando as curvas em que o efeito dispersivo se apresenta.

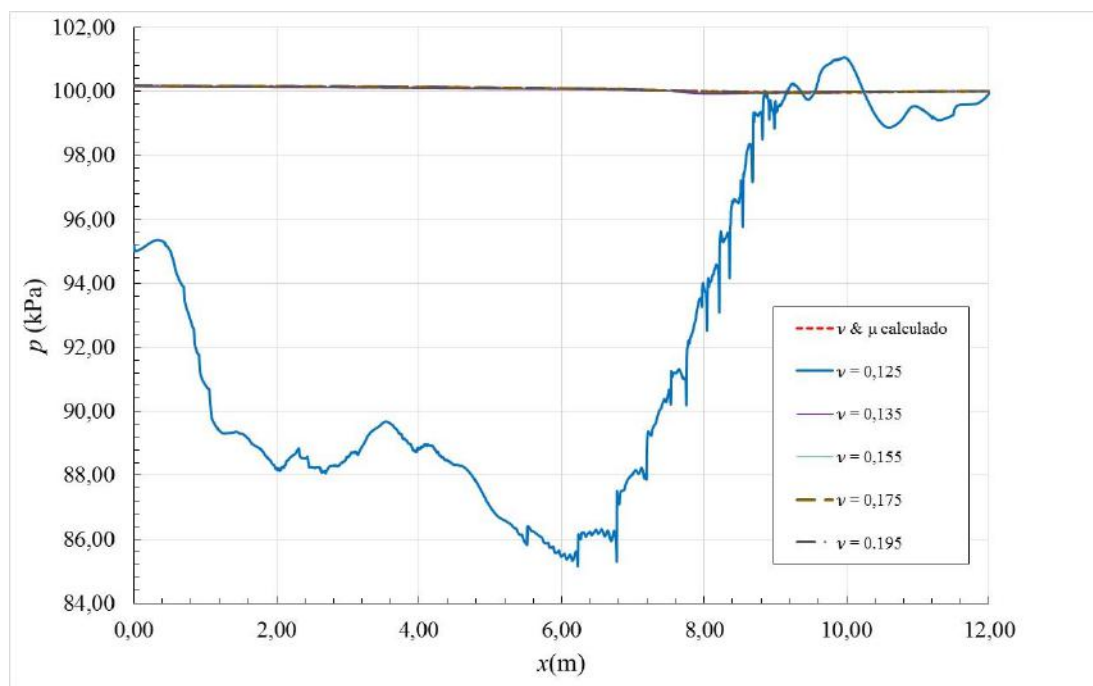


Figura 5.18: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo.

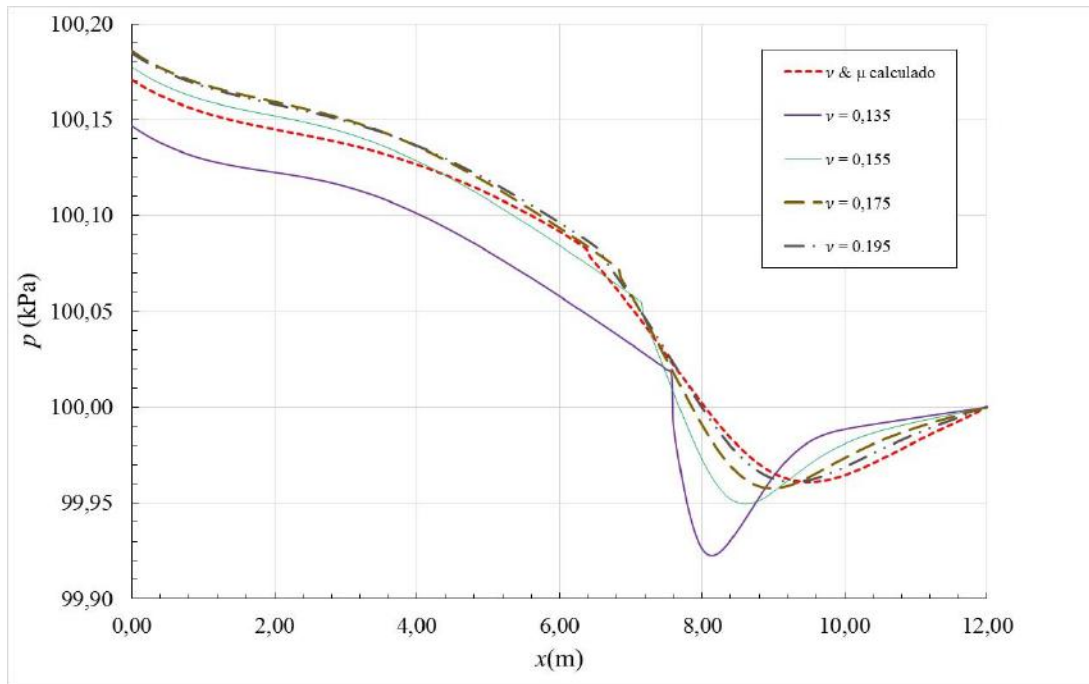


Figura 5.19: Distribuição de pressão ao longo do domínio no tempo $t=0,6s$ para o modelo 5E2P variando o coeficiente difusivo, eliminando as curvas em que o efeito dispersivo se apresenta.

Os efeitos gerados pelos coeficientes difusivos e dispersivos do FCT apresentaram diferenças entre os resultados dos modelos. Para o problema do *water faucet* com o 4E1P o coeficiente $\nu=0,165$ apresentou os melhores resultados em termos de dispersão, enquanto que, para o 5E2P, o coeficiente $\nu=0,135$ apresentou melhores resultados. De forma geral, para garantir uma solução suave e acurada, os coeficientes calculados conforme a recomendação encontrada em FLETCHER (1988) funcionou muito bem para esse problema. A Figura 5.20 faz uma comparação geral desses resultados para o gráfico da fração volumétrica de gás. A figura mostra que o efeito da mudança do coeficiente difusivo para um valor otimizado resulta em uma melhora de resultado muito mais significativa para a curva 5E2P do que a vista no modelo 4E1P. Isso faz com que a curva do modelo de 5E2P, que é um modelo que apresenta solução numérica mais difusiva devido à introdução do passo de relaxação, consiga se aproximar mais do modelo 4E1P e consequentemente da solução analítica.

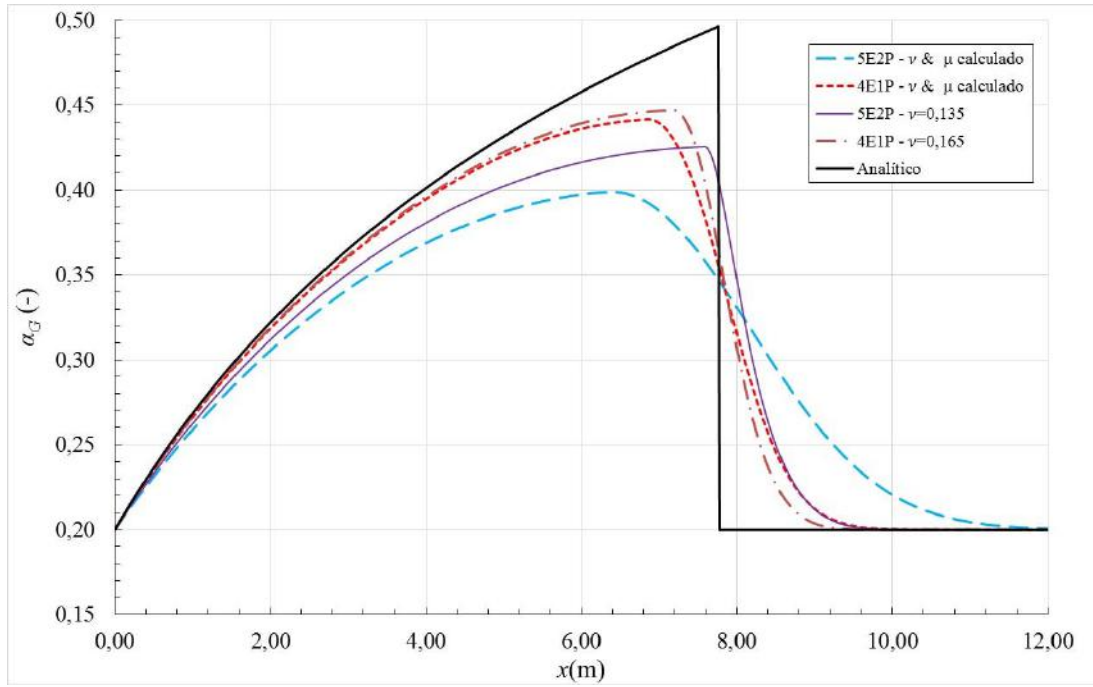


Figura 5.20: Comparação entre a distribuição da fração volumétrica de gás apresentada pelos modelos 4E1P e 5E2P para os coeficientes difusivos otimizados.

5.2 SEPARAÇÃO DE FASES (*SEDIMENTATION*)

O problema de separação de fases (*phase separation / sedimentation*) descrito em YOUNGS (1987) é outro problema conceitual bastante abordado na literatura, para o qual podem ser encontrados resultados relevantes em WALSH E SPALDING (1992), COQUEL *et al.* (1997), PAILLÈRE *et al.* (2003), ESSAMA (2004), EVJE E FLÅTTEN (2003), GUILLARD E DUVAL (2007), MUNKEJORD *et al.* (2009) e SAUREL E FURFARO (2015). O problema representa de forma simplificada o fenômeno de separação de uma mistura, idealmente homogênea, de gás e líquido por efeito da gravidade.

O *sedimentation* é um problema no qual inicialmente, uma mistura homogênea de gás e líquido, com frações volumétricas de líquido e de gás iguais e uniformes em todo domínio ($\alpha_G = \alpha_L = 0,5$). A mistura se encontra presente em um tubo vertical, fechado na entrada e na saída. O escoamento se encontra estático ($u_G = u_L = 0$), e com pressão uniforme ($p = p_G = p_L = 10^5$). Com o efeito da gravidade, a fase líquida se desloca para o fundo do tubo e a fase gasosa para o topo. As condições de contorno utilizadas são a de velocidade nula na entrada e na saída do tubo em ambas as fases. O objetivo desse problema é avaliar os modelos matemáticos quanto à capacidade de simular escoamentos em contracorrente,

com gradientes altos na fração volumétrica, assim como lidar com problemas com frações volumétricas próximas a valores nulos, tanto na fase de gás quanto na fase líquida. Em outras palavras $\alpha_L \rightarrow 1$ (e $\alpha_G \rightarrow 0$) na metade inferior do tubo, enquanto que o inverso acontece na metade superior. Como o tubo é fechado, as condições de contorno são impostas apenas para as velocidades onde $u_G = u_L = 0$ na entrada e na saída. As outras variáveis primitivas não são especificadas ao contorno.

O problema não possui solução analítica durante o tempo, mas possui condição final esperada, em que na metade superior do tubo se encontra o gás puro, e na metade inferior somente líquido. A pressão do gás no regime permanente deve ser próxima a pressão inicial da mistura ($p_G \cong 10^5$), e a pressão de líquido deve variar espacialmente segundo a pressão da coluna hidrostática de líquido acrescida da pressão do gás ($p_L = p_G + \rho_L g x$). A Figura 5.21 representa um esboço da evolução do escoamento no tempo até a condição final esperada.

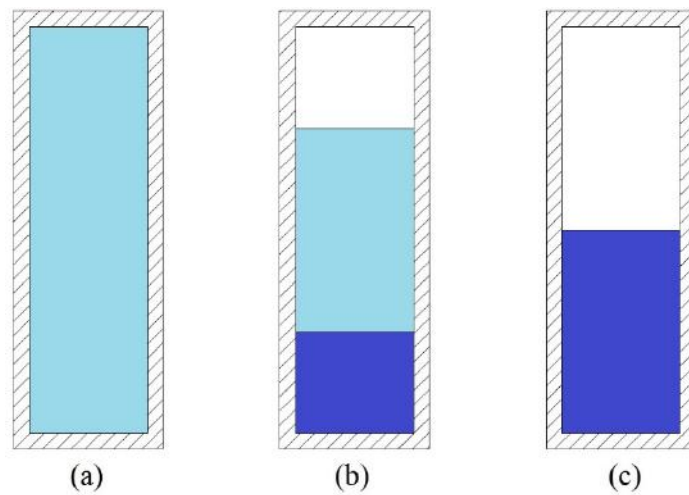


Figura 5.21: Representação da evolução ao longo do tempo do escoamento para o problema *sedimentation*. (a) Mistura distribuída no tubo no instante inicial. (b) Processo transiente de separação das fases pela ação da gravidade. (c) Condição final esperada, onde as duas fases estão separadas.

Para as simulações feitas nesse trabalho, foi considerada a água para a fase líquida e o ar para o gás. As constantes relacionadas à simulação *sedimentation* se encontram na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Constantes para o caso *sedimentation*.

Constante	Símbolo	Valor
Gravidade	g (m/s ²)	9,81
Vel. de propagação de onda no líquido	c_L (m/s)	1480
Massa específica de referência - gás	ρ^o_G (kg/m ³)	0
Massa específica de referência - líq.	ρ^o_L (kg/m ³)	1000
Temperatura	T (°C)	20
Constante do gás	R (J/kg K)	287
Comprimento do tubo	L (m)	7,5

Para obter os resultados, foi utilizada uma malha de 1000 células. Um estudo preliminar, similar ao feito no *water faucet*, forneceu resultados ótimos tanto para o modelo 4E1P quanto para o modelo 5E2P, com $\nu=0,126$ e $\mu=0,125$, onde nenhuma dispersão numérica foi observada. Resultados também foram gerados com os coeficientes propostos por FLETCHER (1988), Eq. (4.26) e Eq. (4.27).

Ambos os modelos 4E1P e 5E2P proporcionaram bons resultados, mas, para o modelo 4E1P com os coeficientes com $\nu=0,126$ e $\mu=0,125$, os valores da fração volumétrica de gás se aproximaram muito de zero gerando um aumento no valor das raízes do polinômio característico na região onde se encontra líquido puro. Esse aumento dos valores das raízes inviabilizou a solução porque o máximo autovalor ficou muito grande, e, como consequência, o passo no tempo ficou muito pequeno. A Figura 5.22 mostra o estado final da fração volumétrica de gás e a Figura 5.23 o estado final da pressão.

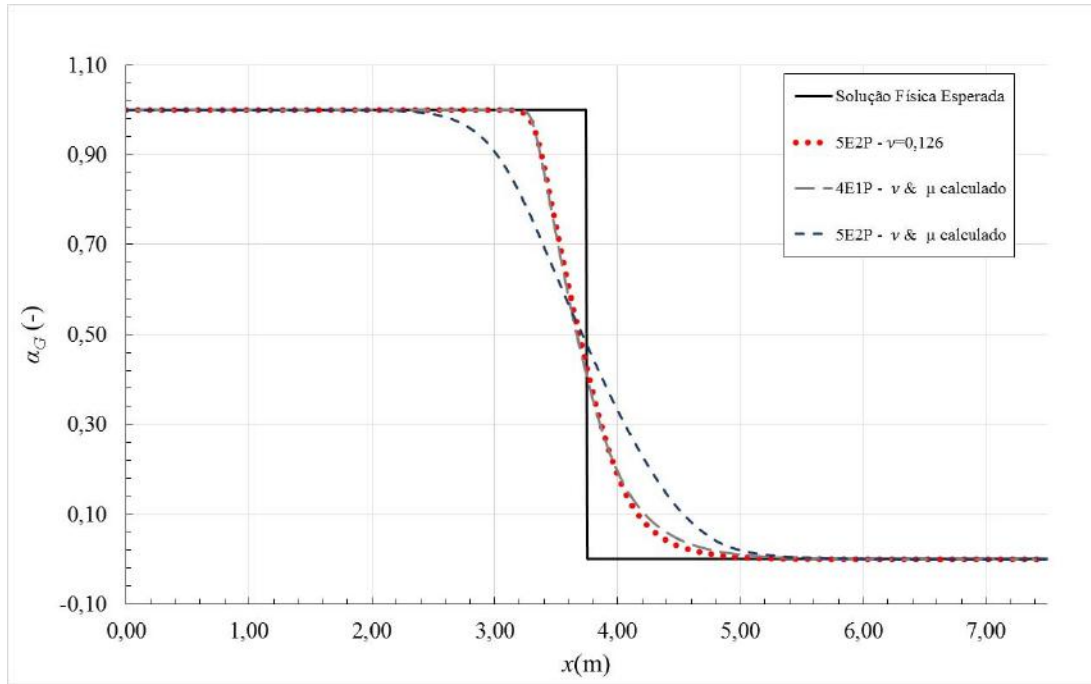


Figura 5.22: Distribuição da fração volumétrica de gás para o caso *sedimentation*.

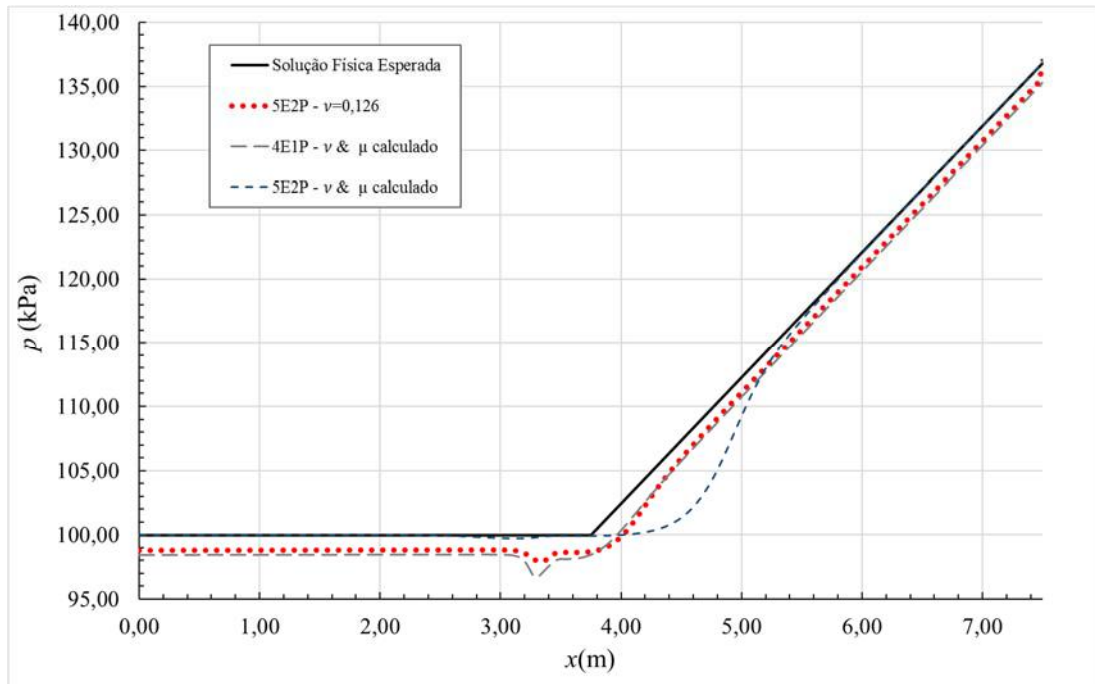


Figura 5.23: Distribuição da pressão para o caso *sedimentation*.

O resultado da Figura 5.24 representa o comportamento do maior valor em módulo do autovalor, λ_{max} , ao longo do tempo na simulação, conforme obtidas pela Eq. (4.15). O instante em que λ_{max} salta no modelo 4E1P representa o instante de tempo em que há a presença de líquido puro na simulação. Quando usados os coeficientes difusivos e

dispersivos calculados para o modelo 4E1P, nota-se uma estabilização do autovalor máximo, o que ocorre devido à entrada no regime permanente. Essa mesma estabilização é esperada para o modelo com 4E1P com $\nu=0,126$, mas os autovalores saltam para valores que influenciam criticamente no passo de tempo necessário para continuar a simulação, conforme mostrado na Eq. (4.14). Já o modelo 5E2P apresenta autovalores estáveis ao longo da simulação, independe das frações volumétricas.

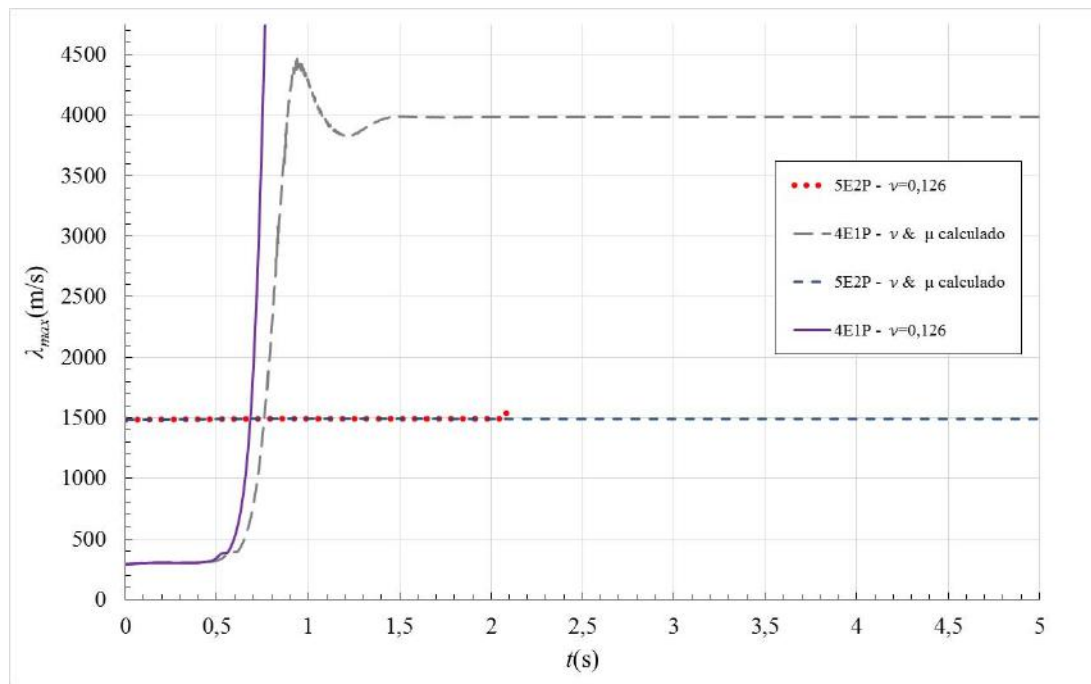


Figura 5.24: Evolução dos máximos autovalores ao longo de cada simulação.

O modelo 5E2P, além de incondicionalmente hiperbólico, apresenta robustez em sua estrutura de autovalores para problemas que apresentam frações volumétricas de gás ou líquido próximas à 1, o que sugere a utilização desse modelo para simulações de escoamentos em que tais efeitos podem estar presentes, como em um escoamento em regime de *slug*.

5.3 TUBO DE CHOQUE COM INTERFACE SEPARANDO OS DOIS FLUIDOS

O problema conceitual proposto por SAUREL E ABGRALL (1999) é um problema de valor inicial representado por um tubo de choque onde no lado esquerdo se encontra água em alta pressão, e no lado direito ar em baixa pressão. As duas fases se encontram em repouso e completamente separadas inicialmente. À medida que o tempo evolui, o líquido puro, no lado esquerdo, sofre uma expansão devido à forte onda de rarefação, enquanto que, no lado direito, uma onda de choque se propaga devido ao movimento da interface entre as fases. Tendo em vista que as frações volumétricas não podem atingir valores nulos, se utiliza um resíduo $\zeta=10^{-6}$, para contabilizar, artificialmente, as partes puras de líquido e de gás no tubo. A condição inicial do problema é apresentada na Tabela 5.5 e as constantes utilizadas no problema encontram-se na Tabela 5.4:

Tabela 5.4: Constantes para o caso do tubo de choque.

Constante	Símbolo	Valor
Gravidade	g (m/s ²)	9,81
Vel. de propagação de onda - líquido	c_L (m/s)	1740
Vel. de propagação de onda - gás	c_G (m/s)	44,72
Massa específica de referência - gás	ρ_G^o (kg/m ³)	0
Massa específica de referência - líq.	ρ_L^o (kg/m ³)	1000
Comprimento do tubo	L (m)	1

Tabela 5.5: Condição inicial do tubo de choque com interface.

Variável	Esquerda	Direita
$\alpha_G(-)$	ζ	$1-\zeta$
p_G (Pa)	2×10^8	10^5
p_L (Pa)	2×10^8	10^5
u_G (m/s)	0	0
u_L (m/s)	0	0

Na simulação foi empregado o modelo 5E2P e foram utilizadas malhas de 250, 500 e 1000 células, com CFL=0,45. Para o FCT foram utilizados os coeficientes de difusão e dispersão calculados de acordo com as Eq. (4.26) e Eq. (4.27). O tubo considerado tem comprimento $L=1$ m e as descontinuidades estão localizadas inicialmente em $x=0,8$ m. Os resultados estão representados no instante de tempo $t=276\mu$ s.

A solução exata, apresentada em SAUREL E FURFARO (2015), foi obtida pelas equações de Euler considerando as duas fases puras ao longo do choque. Para as simulações realizadas neste trabalho, são empregadas a relaxação instantânea de pressão e de velocidade. As soluções numéricas mostraram grande concordância com a solução exata, representando os fenômenos da onda de rarefação no líquido, da onda de choque no gás e do transporte da interface. A Figura 5.25 mostra os gráficos para a fração volumétrica de gás, a Figura 5.26 para a velocidade e a Figura 5.27 para a pressão.

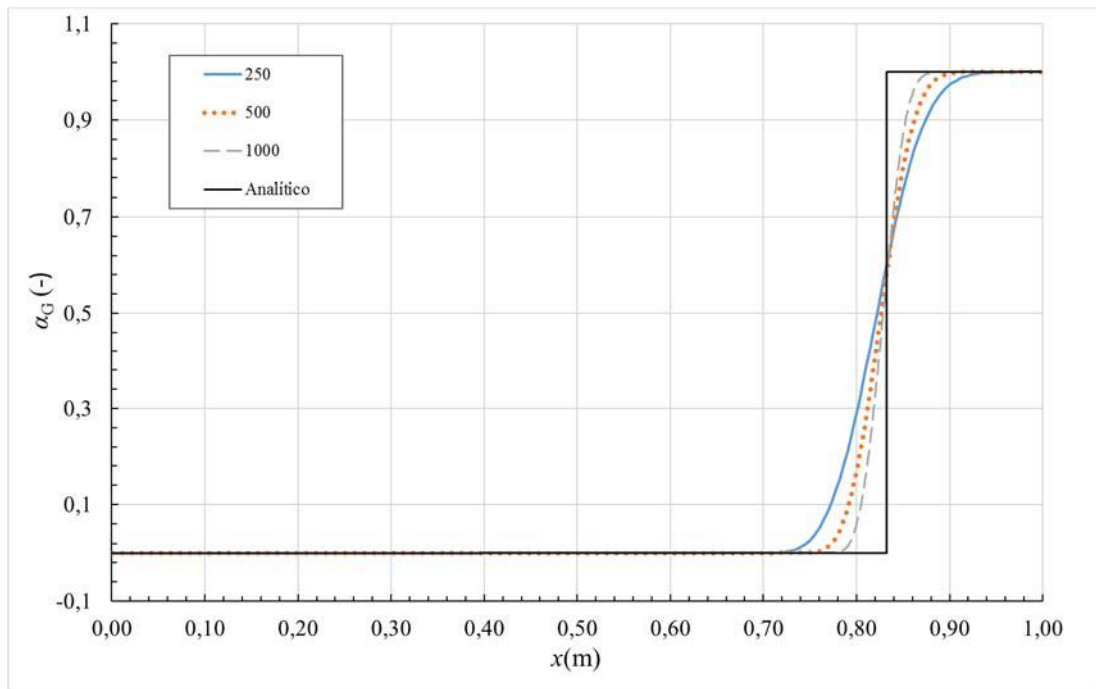


Figura 5.25: Distribuição de fração volumétrica de gás ao longo do tubo variando o número de células de discretização, para o modelo 5E2P.

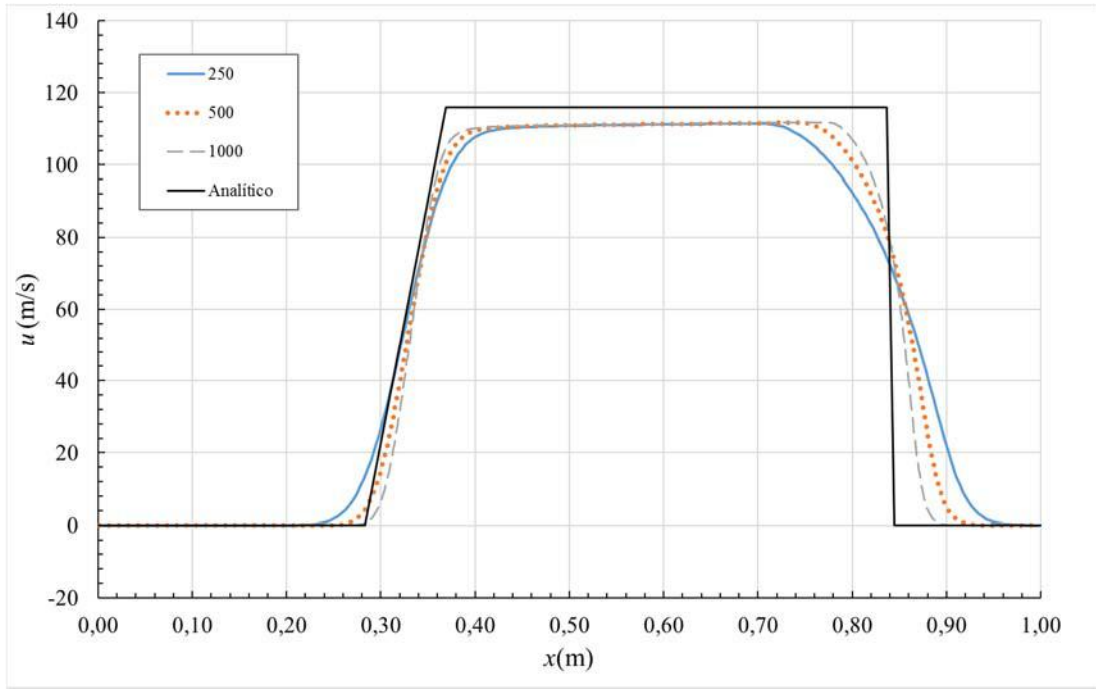


Figura 5.26: Distribuição de velocidade ao longo do tubo variando o número de células de discretização, para o modelo 5E2P.

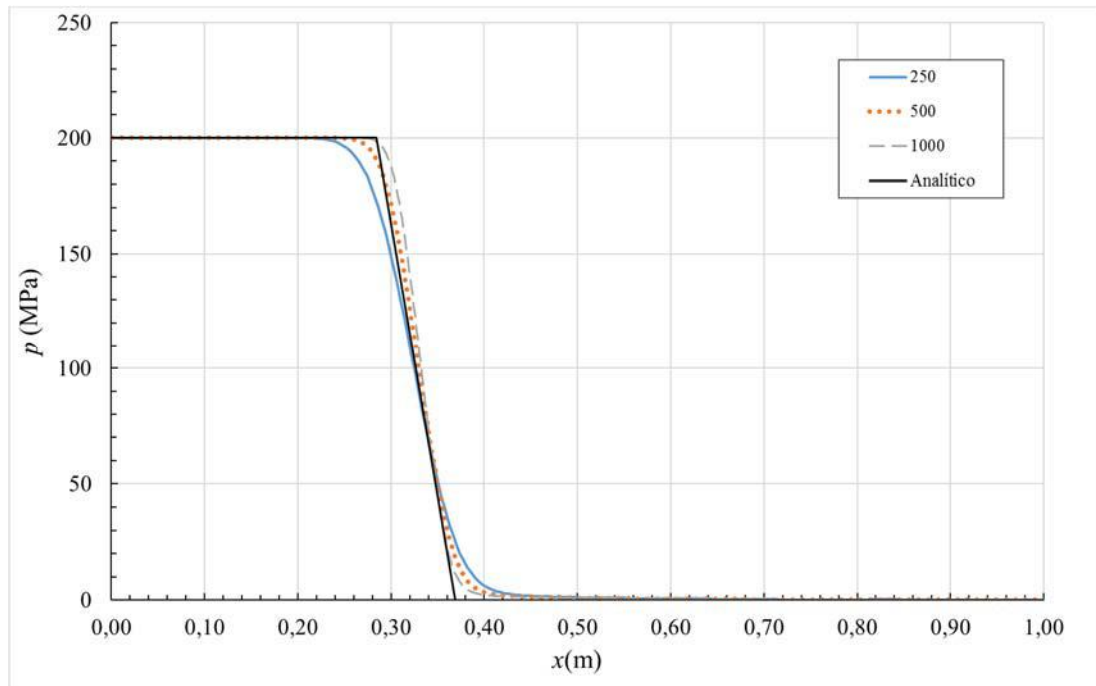


Figura 5.27: Distribuição de pressão ao longo do tubo variando o número de células de discretização, para o modelo 5E2P.

Esse problema é um bom exemplo onde o modelo 4E1P falha em representar os efeitos esperados. O modelo, resolvido com o método FCT, torna o problema instável, mostrando resultados inesperados em sua solução quando parâmetros numéricos básicos,

como número de malha e número de CFL são variados. Tentativas de regular os coeficientes de difusão e dispersão do FCT, a fim de estabilizar a solução, também falharam. Essa falha é devido ao fato de que com a aplicação da relaxação instantânea de velocidade, o termo de correção de pressão se torna nulo, tornando o modelo não-hiperbólico.

5.4 PROBLEMAS DE GASODUTOS

Nessa seção são abordadas as simulações de escoamentos típicos de gasodutos de óleo e gás. Segundo FIGUEIREDO *et al.* (2017), a fração volumétrica de líquido em gasodutos encontra-se em um intervalo típico de 0,8% até 8%. Então, como padrão para as suas simulações em gasodutos, os autores selecionaram dois casos, sendo que o primeiro representa o limite operacional mínimo da fração volumétrica de líquido, que denominam de *low holdup* (LH), e o segundo representa o limite máximo, *high holdup* (HH). Os resultados obtidos por FIGUEIREDO *et al.* (2017) foram gerados utilizando modelo 4E1P, resolvido na forma canônica descrita no Apêndice B com o método FCT. Os autores utilizaram também o termo de correção de pressão para escoamentos estratificados, descrito pela Eq.(3.35). Como comparação, esses mesmos casos são abordados nessa dissertação. O *software* de simulação de escoamentos multifásicos OLGA, também será utilizado para fins de comparação dos resultados.

5.4.1 Breve Descrição do OLGA

A versão 2014.2 do *software* de simulação OLGA utilizada para simular os escoamentos estratificados abordados nessa dissertação é composta por um modelo trifásico que contempla as fases gasosa, líquida e também considera uma fase composta por *droplets*, gotículas do líquido dispersas no escoamento. A fase líquida do modelo é composta por água e óleo. Como as simulações geradas nessa dissertação não contemplam a água, ou seja, apenas óleo e gás, a fração de água presente no escoamento foi reduzida ao mínimo nas simulações do OLGA para minimizar seus efeitos nos resultados. O modelo engloba três equações de conservação de massa, uma para cada fase, e três equações de conservação de quantidade de movimento, uma para a água, uma para o óleo e condensado e a última para o gás e as gotículas de líquido. O modelo do *software* também pode englobar equações de conservação de energia, mas como o

objetivo é a comparação com os modelos isotérmicos 4E1P e 5E2P, essas equações foram desconsideradas para as simulações.

O método numérico utilizado pelo *software* é um método implícito *upwind* de primeira ordem no tempo e no espaço. Para resolver as equações de conservação de massa, pode-se optar por uma solução através do método TVD (*Total Variation Diminishing*), de segunda ordem no espaço, porém essa alternativa não foi a utilizada para as simulações a seguir.

5.4.2 Descrição geral do problema de escoamento estratificado em gasodutos

Para as simulações é considerado um escoamento estratificado. Os escoamentos a serem reproduzidos são os mesmos simulados por FIGUEIREDO *et al.* (2017), onde o gasoduto estudado é considerado horizontal e de seção reta invariante. O duto possui dimensões típicas da indústria, de comprimento $L=45\text{km}$, e um diâmetro interno de $D=0,45\text{m}$. Segundo esses mesmos autores a faixa operacional de pressão dos gasodutos, varia de 1,0MPa até 7,0MPa quando a vazão mássica se encontra na faixa de 8kg/s até 50kg/s. Para a rugosidade absoluta é utilizado um valor de $\varepsilon=0,57\times 10^{-5}\text{m}$.

Inicialmente, os valores das variáveis primitivas do escoamento especificadas como condições de contorno são estendidos para todo o domínio e utilizados como condição inicial. A simulação segue até a convergência, gerando o resultado numérico para a condição de regime permanente do escoamento.

O número de condições de contorno impostas para o modelo 4E1P está atrelado a análise de hiperbolicidade que se encontra detalhada no Apêndice A deste trabalho. Através desta análise, verificou-se que são necessárias três condições de contorno a serem prescritas na entrada e, na saída, apenas uma. Por uma análise similar, porém muito mais simples em que os autovalores para o modelo 5E2P são obtidos de forma analítica, três condições de contorno são impostas na entrada e duas na saída. As condições de contorno impostas na entrada são velocidade de líquido e gás e fração volumétrica e a pressão é imposta na saída. Para o modelo 4E1P a pressão é apenas uma, visto que é um modelo de pressão única, enquanto que para o modelo 5E2P, são impostas as pressões de gás e de líquido na saída do duto. Para as simulações com o modelo 5E2P vale ressaltar que foi utilizado a relaxação instantânea da pressão no passo de relaxação, logo, para as tabelas de condições iniciais e de contorno deve ser interpretado que $p=p_G=p_L$.

Conforme o estudo realizado por FIGUEIREDO *et al.* (2017), para escoamentos de gasodutos resolvidos com o modelo 4E1P em conjunto com o método numérico FCT, para se obter erros de segunda ordem no espaço deve-se utilizar uma malha tal que $\Delta x/L \leq 0,001$. Para assegurar esta condição, nas simulações desta dissertação foi utilizada uma malha de 2500 células de discretização.

Nas simulações a seguir, foram considerados dois esquemas diferentes de representação das equações governantes, o que implica em diferentes vetores de variáveis conservadas, de fluxo e de termos não conservativos. O primeiro esquema, denominado esquema 1 (E1, nas legendas dos gráficos) é o esquema principal apresentado nesta dissertação. Já o esquema 2 (E2, nas legendas dos gráficos) é o apresentado no Apêndice B, que é o mesmo esquema utilizado por FIGUEIREDO *et al.* (2017).

Os termos de correção de pressão também apresentam duas formas de serem modelados, já apresentados no capítulo 3 deste trabalho. Quando utilizado o termo de correção de pressão proposto por BESTION (1990), referencia-se nas legendas dos gráficos “BESTION”. Já para as curvas que foram obtidas a partir da simulação considerando o termo de pressão para escoamento estratificado descrito pela Eq.(3.35), referencia-se “PC” nas legendas dos gráficos.

Quanto aos termos de difusão e dispersão, vale mencionar que foram utilizados os mesmos valores dos coeficientes de difusão e dispersão do FCT que são utilizados por FIGUEIREDO *et al.* (2017), uma vez que esses valores funcionam bem para esse tipo de problema. Estes parâmetros são referenciados nas legendas dos gráficos por “ $\nu=\mu=0,125$ ”. Para as curvas em que os coeficientes difusivo e dispersivo do método são calculados segundo a Eq. (4.26) e a Eq. (4.27), na legenda são referenciadas como “ $\nu\&\mu$ calculados”.

Finalmente, as curvas que representam o modelo numérico utilizado por FIGUEIREDO *et al.* (2017), são denominadas na legenda como “4E1P–E2–PC– $\nu=\mu=0,125$ ”, contemplando todas as variações dos parâmetros estudados neste trabalho. Nas subseções a seguir, são apresentados os resultados obtidos no estudo de casos do tipo *low holdup* e *high holdup*.

5.4.3 Caso *low holdup*

O caso *low holdup*, é o caso que aborda o limite operacional inferior da fração volumétrica de líquido no gasoduto. A Tabela 5.6 apresenta as condições iniciais e de contorno utilizadas para esse caso. Os valores dos demais parâmetros que foram considerados constantes na simulação são representadas na Tabela 5.7.

Tabela 5.6: Condições iniciais e de contorno para o caso *low holdup*.

Variável	Posição da condição de contorno	Valor
p (MPa)	Saída: $x=L$	6,0
u_G (m/s)	Entrada: $x=0$	5,25
u_L (m/s)	Entrada: $x=0$	0,98
α_L (-)	Entrada: $x=0$	0,008

Tabela 5.7: Constantes para o caso *low holdup*.

Constante	Símbolo	Valor
Gravidade	g (m/s ²)	9,81
Vel. de propagação de onda no líquido	c_L (m/s)	900
Massa específica de referência - gás	ρ^o_G (kg/m ³)	0
Massa específica de referência - líq.	ρ^o_L (kg/m ³)	720
Temperatura	T (°C)	20
Constante do gás	R (J/kg K)	419,6
Rugosidade absoluta	ε (m)	$0,57 \times 10^{-5}$
Diâmetro interno	D (m)	0,45
Comprimento do duto	L (km)	45

As curvas da Figura 5.28 mostram a distribuição de pressão ao longo do gasoduto. As curvas apresentam boa concordância no comportamento físico da pressão, mostrando que há uma queda de pressão ao longo do duto devido ao atrito na parede e à interação entre as fases. Comparado as curvas apresentadas, percebe-se que quando utilizados esquemas de discretização, termos de correção pressão e coeficientes difusivos e dispersivos diferentes, nota-se que não há uma grande variação quando o mesmo modelo de equações diferenciais é utilizado. Para modelos diferentes, nota-se uma variação nas curvas, mas todos os modelos utilizados conseguiram representar os mesmos efeitos. O erro relativo máximo, quando comparado aos resultados de referência (modelo 4E1P – E2 – PC – $\nu=\mu=0,125$) ao modelo 5E2P – E2 – PC – $\nu=\mu=0,125$ foi de 2,38%. Já quando

comparado com o *software* OLGA, apresenta um erro de 2,66%. A simulação com modelo 4E1P, em geral, apresenta resultados para pressão muito próximos aos resultados obtidos com o OLGA (erro 0,28% considerando o OLGA como referência).

Conclui-se, então, que os resultados obtidos para os modelos alternativos propostos nessa dissertação são acurados, quanto a pressão, variável mais sensível, quando comparados com os modelos de referência do OLGA e de FIGUEIREDO *et al.* (2017).

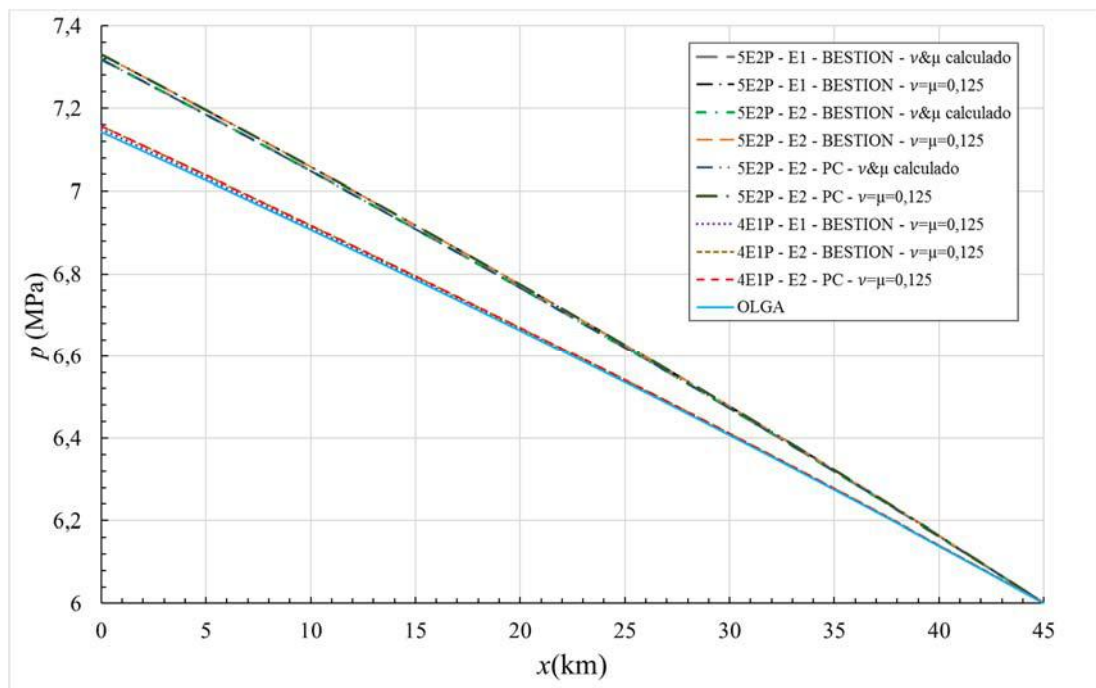


Figura 5.28: Distribuição de pressão ao longo do duto para o caso *low holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

Com a queda da pressão ao longo do duto, um aumento das velocidades do escoamento é esperado. O fluxo de massa deve se manter constante ao longo do escoamento para ambas as fases, já que as equações de conservação da massa são separadas para cada fase e não há mudança de fase nos modelos estudados. Como a fase gasosa apresenta compressibilidade, o gás deve expandir consideravelmente com a redução da pressão, fazendo com que a velocidade de gás aumente. Já o líquido não apresenta efeitos de compressibilidade consideráveis, no modelo 5E2P, ou é incompressível no modelo 4E1P e, então, deve apresentar um aumento na sua velocidade, devido ao arrasto criado pelo diferencial de velocidade entre as fases na interface. A

fração volumétrica de líquido deve então cair, já que a velocidade do líquido aumenta e a massa específica do mesmo se mantém praticamente invariável para o modelo 5E2P, ou constante para o modelo 4E1P, para que a equação da continuidade seja conservada.

As curvas da Figura 5.29 mostram a distribuição de fração volumétrica de líquido ao longo do duto. Os erros relativos entre os modelos utilizados nesse trabalho e o modelo numérico utilizado por FIGUEIREDO *et al.* (2017) são muito pequenos, mostrando boa concordância entre os modelos 4E1P e 5E2P para todas as suas variações. Já quando comparados com o *software* OLGA é obtido uma variação maior na entrada do duto, mas na saída os valores também convergem para valores próximos. Para as curvas de distribuição de velocidade de gás, Figura 5.30, os erros relativos entre as curvas são também pequenos, mostrando boa concordância entre os modelos estudados. Já para as curvas de velocidade de líquido apresentadas na Figura 5.31, todos os modelos estudados apresentaram concordância entre si, mas apresentaram um erro relativo considerável em relação ao OLGA.

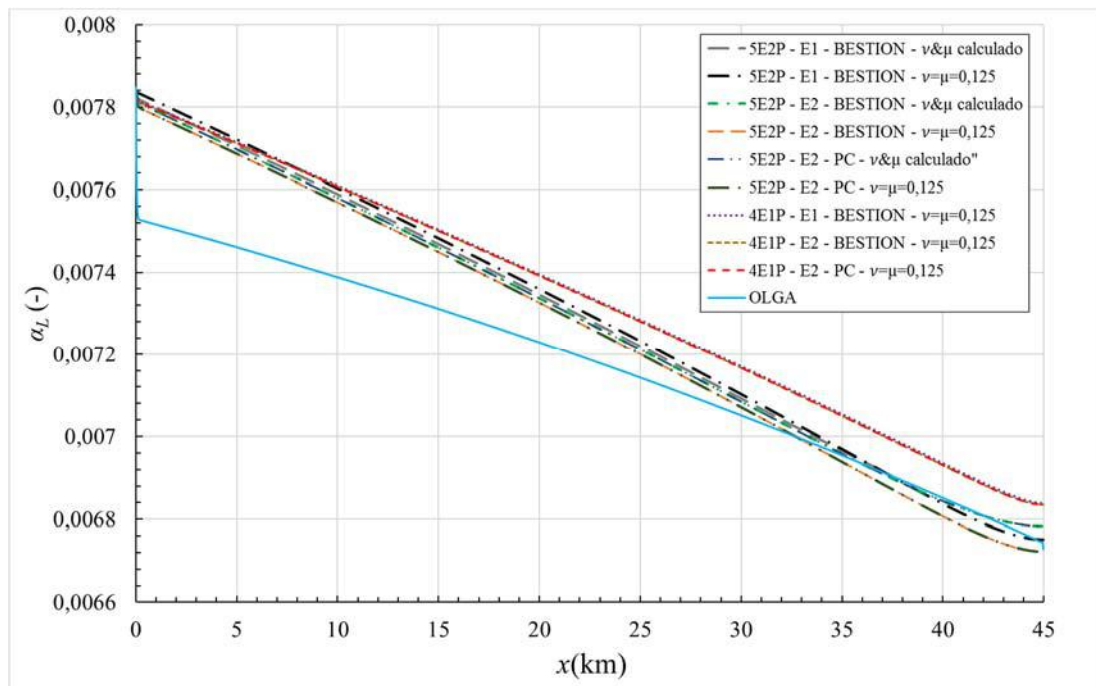


Figura 5.29: Distribuição de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para o caso *low holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

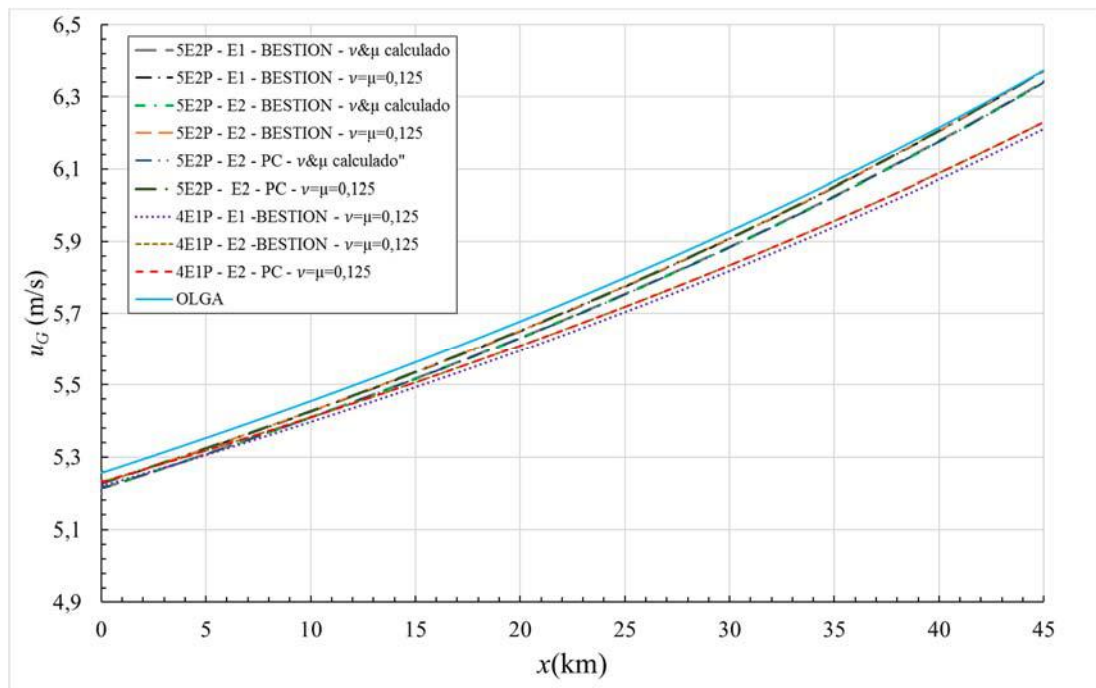


Figura 5.30: Distribuição de velocidade de gás ao longo do duto para o caso *low holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

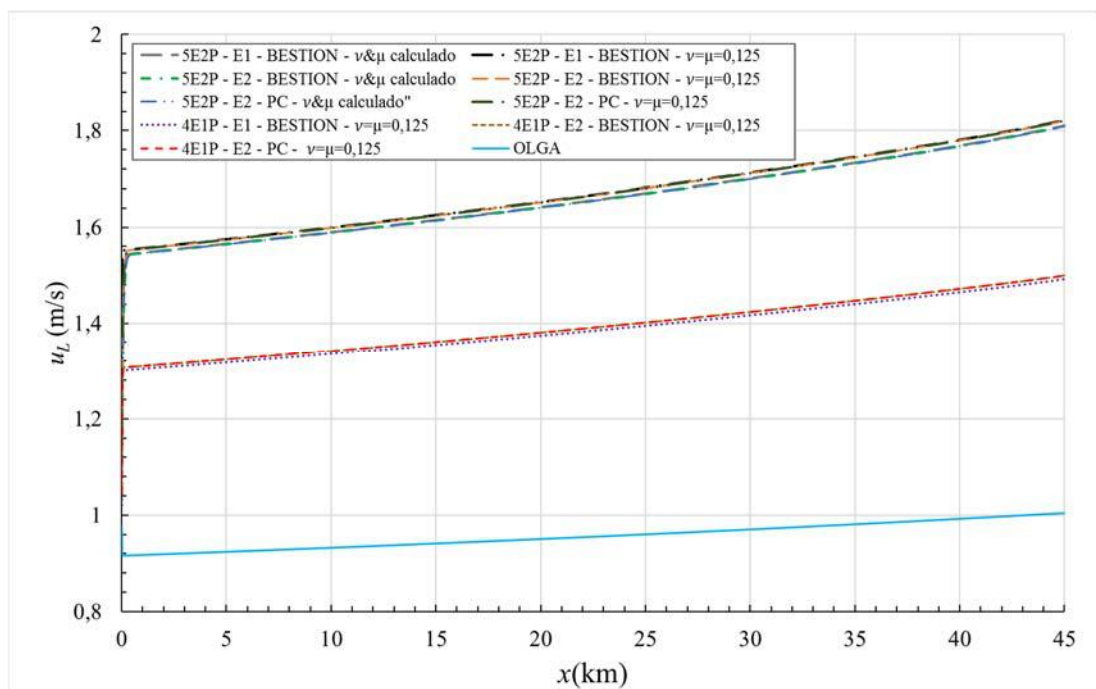


Figura 5.31: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do duto para o caso *low holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

5.4.4 Caso *high holdup*

O caso *high holdup*, aborda o limite operacional superior da fração volumétrica de líquido no gasoduto. A Tabela 5.8 apresenta as condições iniciais e de contorno utilizadas para esse caso. Os valores dos demais parâmetros que foram considerados constantes na simulação são representadas na Tabela 5.9.

Tabela 5.8: Condições iniciais e de contorno para o caso *high holdup*.

Variável	Posição da condição de contorno	Valor
p (MPa)	Saída: $x=L$	6,0
u_G (m/s)	Entrada: $x=0$	4,08
u_L (m/s)	Entrada: $x=0$	1,24
α_L (-)	Entrada: $x=0$	0,088

Tabela 5.9: Constantes para o caso *low holdup*.

Constante	Símbolo	Valor
Gravidade	g (m/s ²)	9,81
Vel. de propagação de onda no líquido	c_L (m/s)	900
Massa específica de referência - gás	ρ^o_G (kg/m ³)	0
Massa específica de referência - líq.	ρ^o_L (kg/m ³)	700
Temperatura	T (°C)	20
Constante do gás	R (J/kg K)	376,16
Rugosidade absoluta	ε (m)	$0,57 \times 10^{-5}$
Diâmetro interno	D (m)	0,45
Comprimento do tubo	L (km)	45

As curvas da Figura 5.32 mostram a distribuição de pressão para o caso *high holdup*. Pode-se notar que há poucas diferenças com a mudança do esquema de discretização utilizado, com os coeficientes difusivos e dispersivos e com os dois termos de correção de pressão para o mesmo modelo. Quando comparados os modelos 4E1P e 5E2P nota-se uma diferença menor do que aquela notada no caso *low holdup*, em que o modelo 5E2P apresenta um erro relativo máximo ao modelo 4E1P de 0,44%. Já se comparado ao OLGA, o modelo 5E2P apresenta erro relativo máximo de 0,3%. Os erros relativos são pequenos e os gráficos apresentam boa concordância com o comportamento físico esperado. Na Figura 5.33, que apresenta a distribuição da fração volumétrica de líquido, nota-se erros relativos menores que as curvas de fração volumétrica para o caso *low*

holdup quando comparado ao OLGA. Nas curvas de velocidade de gás, representadas na Figura 5.34, é possível verificar uma diferença nos resultados obtidos com o modelo 5E2P, quando aplicados os cálculos dos coeficientes difusivos e dispersivos, mas os modelos em geral fornecem resultados que representam corretamente os mesmos efeitos físicos. A Figura 5.35, que representa as curvas para a distribuição de velocidade do líquido ao longo do duto, observa-se resultados discrepantes em relação ao simulador OLGA, da mesma forma que foi vista no caso do *low holdup*.

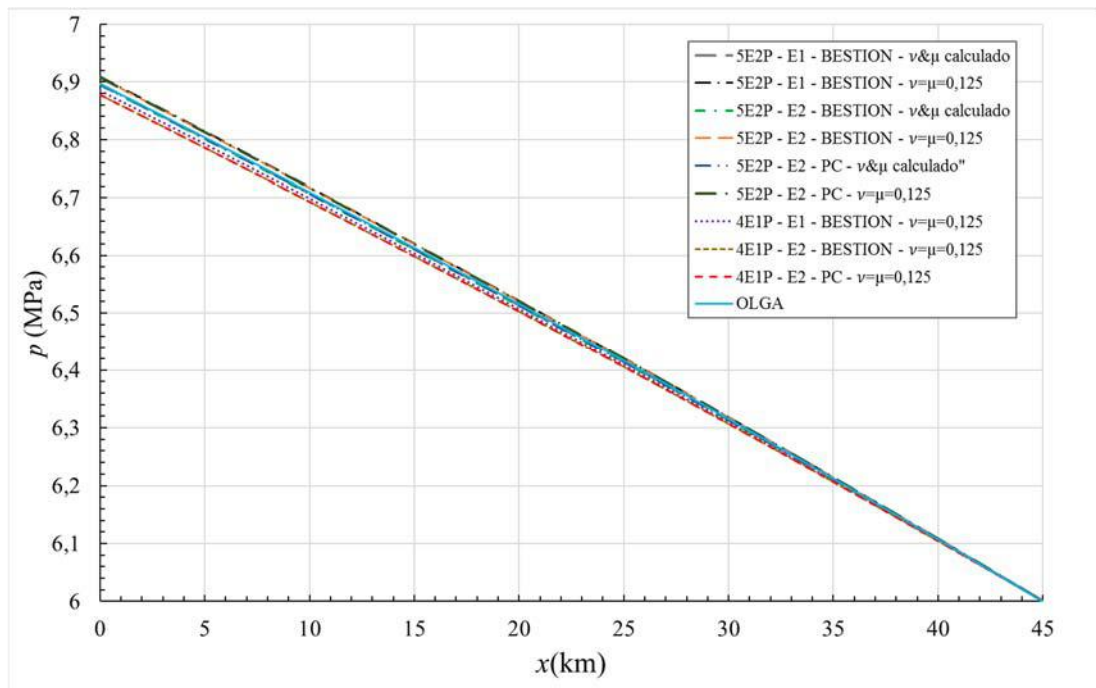


Figura 5.32: Distribuição de pressão ao longo do duto para o caso *high holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

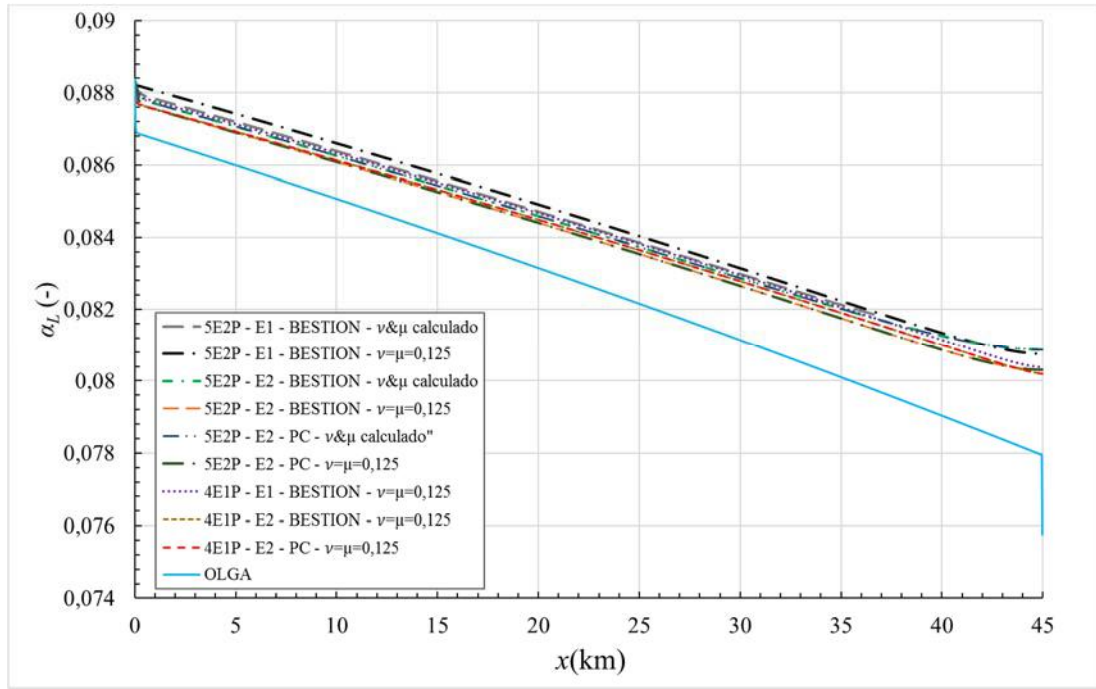


Figura 5.33: Distribuição de fração volumétrica de líquido ao longo do duto para o caso *high holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

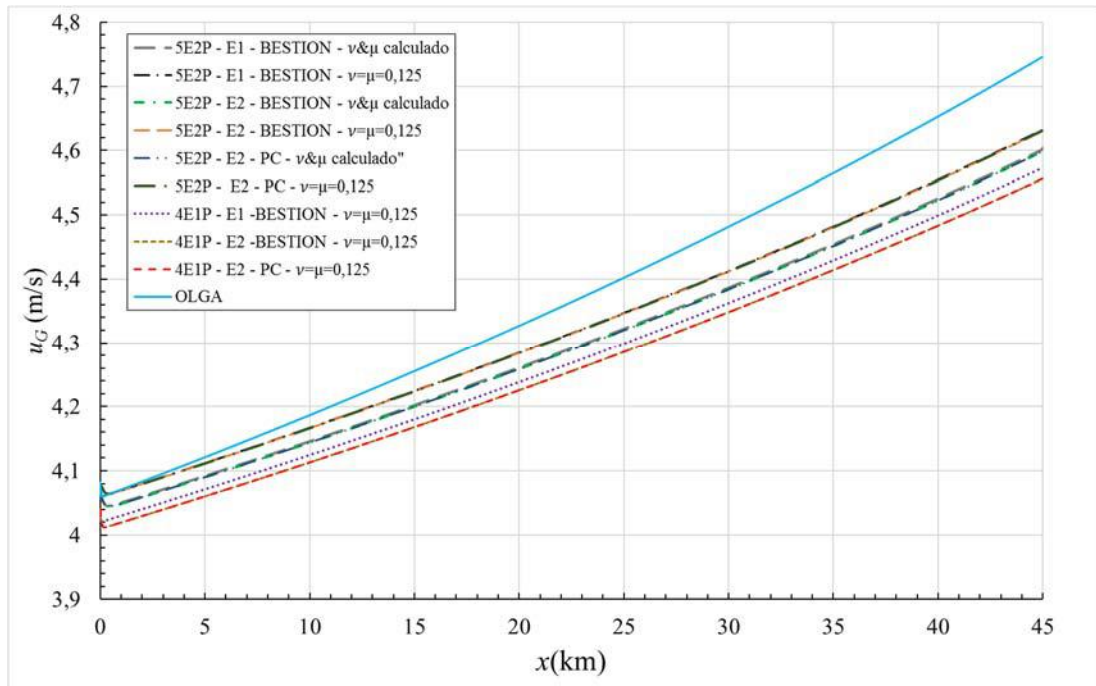


Figura 5.34: Distribuição de velocidade de gás ao longo do duto para o caso *high holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

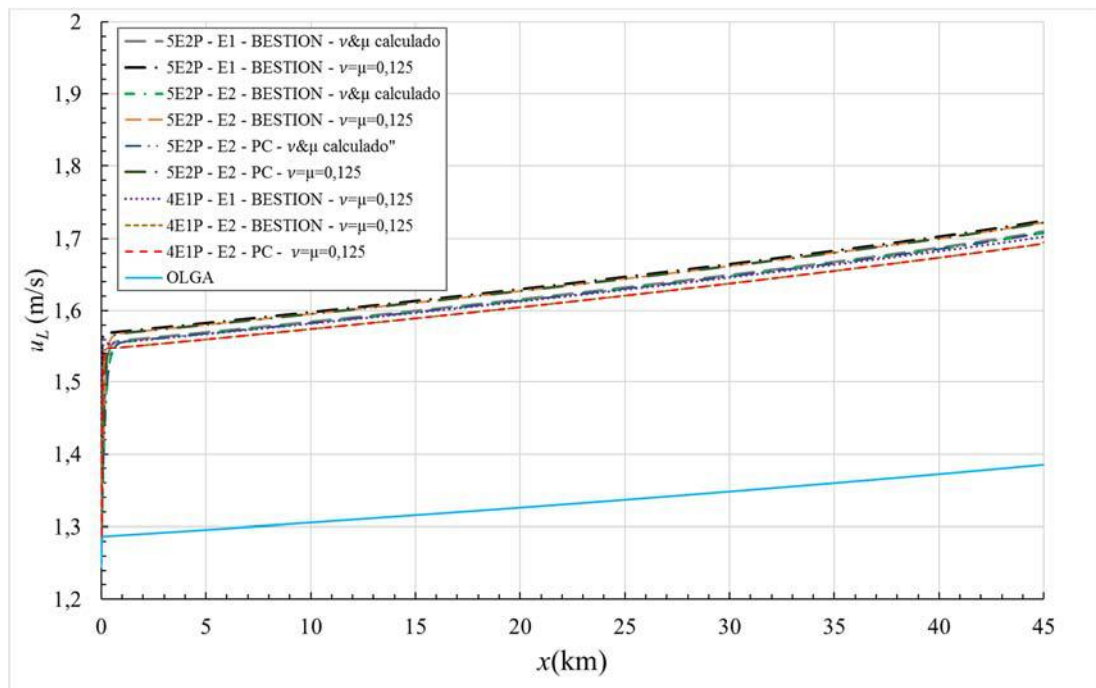


Figura 5.35: Distribuição de velocidade de líquido ao longo do duto para o caso *high holdup* considerando os modelos 4E1P e 5E2P com suas variações, em comparação com resultado obtido com o *software* OLGA.

Para ambos os casos teste simulados, os modelos apresentam resultados satisfatórios, mostrando boa concordância entre si. As pequenas discrepâncias encontradas entre o modelo 4E1P e 5E2P são esperadas, uma vez que existem diferenças entre as formulações matemáticas dos modelos. O modelo 4E1P, com a equação de correção de pressão de BESTION (1990) apresenta diferenças mínimas quando comparado ao modelo de correção de pressão p_c , utilizado anteriormente por FIGUEIREDO *et al.* (2017). Esse resultado é explorado no Apêndice A, que descreve a análise de hiperbolicidade para os dois modelos, verificando que a faixa de hiperbolicidade aumenta quando o modelo de BESTION (1990) é utilizado, abrangendo toda a área em que um escoamento estratificado pode ser simulado nas condições estudadas neste trabalho. A obtenção de resultados válidos para o modelo 5E2P também é de grande importância, tendo em vista que o modelo é incondicionalmente hiperbólico, podendo gerar simulações onde o modelo 4E1P falharia.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho apresentou dois modelos de dois fluidos unidimensionais para a solução de escoamentos bifásicos. Ambos os modelos são constituídos por um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares que descrevem os princípios da conservação de massa e de quantidade de movimento linear para cada fase. Uma grande diferença entre os modelos está no tratamento da pressão, onde o modelo 4E1P trata a pressão de forma única para as fases e o modelo 5E2P admite, a priori, duas pressões correlacionando-as no passo de relaxação. Essa diferença adicionada à presença da equação de evolução da fração volumétrica no modelo 5E2P faz com que o modelo seja incondicionalmente hiperbólico. Os sistemas de equações diferenciais parciais de cada modelo é resolvido utilizando o método numérico FCT através de códigos programados na linguagem FORTRAN.

Os problemas abordados nessa dissertação são direcionados a escoamentos multifásicos transientes, resolvidos através de uma abordagem unidimensional, sem troca de massa entre as fases. Os problemas escolhidos foram direcionados tanto para uma abordagem conceitual através de simulações de problemas *benchmark*, bem consolidados na literatura, quanto para uma abordagem de engenharia, resolvendo problemas reais tais como escoamentos em regime estratificado presente em gasodutos. Os casos foram escolhidos, a fim de mostrar as vantagens e desvantagens entre os modelos utilizados, assim como de explorar as opções oferecidas pelo método FCT, no âmbito de soluções numéricas.

6.1 CONCLUSÕES

O trabalho focou na descrição dos modelos matemáticos 4E1P e 5E2P, os quais, em tese, possuem as mesmas equações de conservação de massa e quantidade de movimento. Porém, devido ao fato do modelo 5E2P admitir a compressibilidade na fase líquida, com a inclusão de uma equação de estado, aciona-se uma variável primitiva, ao se considerar as pressões de cada fase distintas, e a inclusão da equação de transporte de fração volumétrica, esse modelo se torna incondicionalmente hiperbólico, ao contrário do modelo 4E1P que é condicionalmente hiperbólico. Essa condição de hiperbolicidade torna o modelo 5E2P mais estável do que o 4E1P numericamente.

O primeiro caso teste abordado, identificado como escoamento dominado pela gravidade e conhecido na literatura por *water faucet*, serve como um caso de validação para os modelos numéricos estudados, por possuir uma solução analítica e por ser amplamente utilizado na literatura. Os resultados obtidos para esse caso teste foram satisfatórios quando comparados aos resultados analíticos para ambos os modelos, constatando a validade da utilização do FCT em conjunto com os modelos 4E1P e 5E2P para simulações de escoamentos transientes, e com a presença de fortes descontinuidades nas frações volumétricas. Foram feitos estudos de refinamento de malha para ambos os modelos, verificando uma melhora considerável nos resultados com o refinamento da malha. Nessa etapa as diferenças de resultados entre os modelos são mais evidentes, com o modelo 5E2P apresentando erros difusivos maiores que o 4E1P. Para os resultados obtidos no estudo de refinamento de malha utilizou-se os esquemas de cálculo dos coeficientes difusivo e dispersivo propostos por FLETCHER (1988), em que os coeficientes são calculados ao longo da simulação. Afim de reduzir os erros de difusão, também foi feito um estudo comparando os efeitos que os coeficientes difusivos causam na solução numérica. A mudança nos coeficientes impacta fortemente na estabilidade das simulações, especialmente para o modelo 4E1P. Do ponto de vista de redução de erro em relação a solução analítica, a variação dos coeficientes é mais eficaz para o modelo 5E2P.

O segundo caso teste denominado de separação de fases ou *sedimentation*, como é geralmente referido na literatura, é um caso que explora escoamentos em contracorrente e casos em que é possível simular, de forma numérica artificial, a presença de seções onde o escoamento é monofásico no domínio. Para esse caso, ambos os modelos conseguiram evoluir o escoamento para o estado físico esperado, onde se encontra gás puro na parte superior e líquido puro na parte inferior, mas cada modelo apresentou peculiaridades numéricas. O modelo 4E1P, quando resolvido com os coeficientes difusivo e dispersivo impostos, não apresentou nenhum tipo de instabilidade numérica ao longo de sua simulação, mas os autovalores cresceram de forma a inviabilizar a continuidade da simulação, já que os passos de tempo necessários para chegar ao regime permanente se tornam pequenos demais. Quando utilizado os coeficientes difusivo e dispersivo, conforme proposto por FLETCHER (1988), a simulação para o 4E1P se estabiliza, conseguindo chegar ao resultado final. Já para o 5E2P, quando utilizadas as duas formas de se impor os coeficientes difusivo e dispersivo, a simulação chegou no regime permanente e os autovalores não apresentaram instabilidades, se mantendo constantes ao longo da simulação. Esses efeitos de crescimento no autovalor quando as frações

volumétricas atingem valores próximos a $\alpha_L=1$, de líquido puro, são importantes na escolha do modelo a ser utilizado para escoamentos que apresentam esse tipo de característica. Isso mostra que para um escoamento onde tal efeito possa ocorrer, como um *slug* ou em um duto por onde passa um *pig*, o modelo 5E2P é um forte candidato para uma simulação consistente.

Outro caso teste apresentado foi o tubo de choque, conforme proposto por SAURELL E ABGRALL (1999). Nesse caso é estudado um choque sem escorregamento entre as fases, utilizando a condição de relaxação instantânea de velocidade. É um caso que explora os efeitos de rarefação e propagação de onda tratando as duas fases de forma separada, do lado esquerdo somente líquido e do lado direito somente gás. O caso é simulado com sucesso quando utilizado o modelo 5E2P. Mas o modelo 4E1P falha, já que perde a hiperbolicidade do seu sistema de equações diferenciais quando as velocidades de cada fase se igualam após o passo de relaxação instantânea de velocidade.

Além desses problemas conceituais, foram geradas nessa dissertação simulações de escoamento estratificado de gás e líquido, usualmente presentes nos gasodutos da indústria, conforme os dados e o modelo apresentado no trabalho de FIGUEIREDO *et al.* (2017). Nessa etapa foram explorados os modelos 4E1P e 5E2P apresentados nesse trabalho, direcionados ao escoamento de padrão estratificado. Também foi utilizado o esquema de equações na forma canônica conforme a modelagem proposta por FIGUEIREDO *et al.* (2017), para o 4E1P, e uma adaptação desse mesmo esquema para o modelo 5E2P.

Foi feita uma análise de hiperbolicidade, presente no Apêndice A para o modelo 4E1P, que é condicionalmente hiperbólico para os dois modelos de correção de pressão. O modelo proposto por BESTION (1990) e o modelo específico para escoamentos estratificados apresentado na Eq. (3.35). Nessa análise foi verificado que o modelo de BESTION (1990) é hiperbólico para toda a faixa de escoamento estratificado, imposta pelo mapa de padrão de escoamentos apresentado por TAITEL E DUKLER (1976). Já quando utilizado a correção específica para escoamentos estratificados, p_c , a análise de hiperbolicidade mostrou regiões onde o escoamento estratificado pode apresentar inversão do sinal dos autovalores, e até uma perda de hiperbolicidade do modelo 4E1P. Análises de hiperbolicidade para o modelo 5E2P não são necessárias, tendo em vista que o modelo é incondicionalmente hiperbólico para qualquer tipo de modelo de pressão interfacial utilizado.

Nas simulações, os modelos de correção de pressão apresentaram boa concordância entre si, para ambos os casos simulados em ambos os modelos 4E1P e 5E2P. Os erros em comparação com o *software* OLGA para todos as variantes de casos rodados são pequenos.

Em resumo, a utilização do modelo 5E2P acoplado ao método numérico FCT amplia bastante a faixa de aplicabilidade quando comparado ao modelo 4E1P para problemas reais de engenharia.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros, sugere-se algumas melhorias nos modelos matemáticos e no método numérico utilizados nessa dissertação, que são discutidas a seguir.

Na aplicação dos modelos, novos fenômenos físicos os podem ser introduzidos, como a transferência de massa entre as fases, a variação de parâmetros do escoamento, como a mudança da viscosidade com a temperatura ao longo da simulação. Os modelos também podem ser estendidos para incorporar outros padrões de escoamento, como os padrões de bolhas e golfadas, assim como a transição entre os padrões.

Pretende-se também estudar a acurácia no espaço do método numérico para o modelo 5E2P, afim de verificar qual é a malha ideal para tal modelo em problemas de escoamento estratificado em gasodutos. Adicionalmente, é possível elevar a ordem de acurácia no tempo, que, neste trabalho, é de primeira ordem.

Uma outra sugestão para trabalhos futuros, seria utilizar o modelo 4E1P em comparação com o modelo 5E2P para escoamentos estratificados, simulando casos que se enquadram na faixa não hiperbólica do modelo 4E1P que utiliza com o termo de correção de pressão p_c (Eq.(3.35)). Para estes casos, o termo de correção de pressão de BESTION (1990) pode ser utilizado no modelo 4E1P e no 5E2P e comparados com resultados utilizando e o termo de correção de pressão p_c no modelo 5E2P.

Uma nova comparação que pode ser feita é a introdução do modelo completo proposto por SAUREL E ABGRALL (1990), que resolve as mesmas equações gerais do modelo 5E2P, e mais duas equações de conservação de energia, uma para cada fase. Esse modelo, também incondicionalmente hiperbólico, pode ser comparado aos resultados semelhantes àqueles de SONDERMANN (2016), em que é simulado um escoamento em gasodutos com transferência de calor, como um modelo comparável ao modelo da autora.

Para o método numérico FCT, uma nova relação de cálculo dos coeficientes difusivos e dispersivos pode ser adotada. O ideal é gerar uma relação que consiga estabilizar a dispersão numérica e ao mesmo tempo gerar resultados com poucos erros difusivos. Nesse trabalho foi notado que para cada modelo, uma certa combinação de coeficientes difusivo e dispersivo são ótimas. O ideal seria estabelecer uma relação de cálculo para os coeficientes específicos para cada modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDREUSSI, P., PERSEN, L.N., 1987, “Stratified Gas-Liquid Flow in Downwardly Inclined Pipes”, *International Journal of Multiphase Flow*, v. 13, n. 4, pp. 565-575;
- ANSARI, M.R., DARAMIZADEH, A., 2012, “Slug type hydrodynamic instability analysis using a five equations hyperbolic two-pressure, two-fluid model”, *Ocean Engineering*, v. 52, pp. 1-12;
- BAER, M.R., NUNZIATO, J.W., 1986, “A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials”, *Int. J. Multiphase flow*, v.12, No 6, pp.861-889;
- BARNEA, D., TAITEL, Y., 1996, “Stratified three-phase flow in pipes - stability and transition”, *Chemical Engineering Communications*, v.141-142, 443–460;
- BENDIKSEN, K. M., MALNES, D., MOE, R., NULAND, S., 1991, “The Dynamic Two-Fluid Model OLGA: Theory and Application”, *SPE Production Engineering*, pp. 171-180, May;
- BESTION, D., 1990, “The physical closure laws in the CATHARE code”, *Nuclear Engineering and Design*, v.124, pp. 229–245;
- BOOK, D.L., BORIS, J.P., HAIN, K., 1975, “Flux-Corrected Transport II. Generalizations of the Method”, *Journal of Computational Physics*, v.18, pp.248-283;
- BORIS, J.P., BOOK, D.L., 1973, “Flux correct transport I - SHASTA - A fluid transport algorithm that works”, *Journal of Computational Physics*, v. 11, pp. 38-69;
- BUENO, D.E.G.P., 2013, *Modelagem numérica do escoamento bifásico em gasodutos com padrão estratificado*, Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

BUENO, D.E.G.P., FIGUEIREDO, A.B, BAPTISTA, R.M., RACHID, F.B.F., BODSTEIN, G.C.R., 2014, “Numerical simulation of stratified two-phase flow in a nearly horizontal gas-liquid pipeline with a leak”, *Proceedings of the 2012 9th International Pipeline Conference – IPC*, Calgary, Alberta, Canada, September 2014;

COQUEL, F., EL AMINE, K., GODLEWSKI, E., PERTHAME, B., RASCLE, P., 1997, “A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows”, *Journal of Computational Physics*, v. 136, pp. 272-288;

DREW, D.A., 1983, “Mathematical modeling of two-phase flows”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v.15, 261–291;

DREW, D.A., PASSMAN, S.L, 1999, “Theory of Multicomponent Fluids”, *Applied Mathematical Sciences*, v. 135, New York, Springer-Verlag;

ESSAMA, C.O., 2004, *Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Stratified & Slug Flow Regimes)*, PhD Thesis, School of Engineering Applied Mathematics and Computing Group, Cranfield University, Bedford, United Kingdom;

EVJE, S., FLÅTTEN, T., 2003, “Hybrid flux-splitting schemes for a common two-fluid model”, *Journal of Computational Physics*, v.192, pp. 175–210;

EVJE, S., FJELDE, 2002, “Relaxation schemes for the calculation of two-phase flow in pipes”, *mathematical and Computer Modelling*, v.36, pp. 535-567;

EVJE, S., FJELDE, 2003, “On a rough AUSM scheme for a one-dimensional two-phase model”, *Computers & Fluids*, v.32, 1497-1530;

FIGUEIREDO, A.B, 2010, *Validação teórica de uma modelagem para escoamentos bifásicos em gasodutos com duas equações de conservação para cada fase*, Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

FIGUEIREDO, A. B., 2016, *Localização de vazamento em gasoduto com escoamento bifásico de padrão estratificado*, Tese de D.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

FIGUEIREDO, A.B., BUENO, D.E.G.P., BAPTISTA, R.M., RACHID, F.B.F., BODSTEIN, G.C.R., 2012, “An accuracy study of the flux-corrected transport numerical method applied to transient two-phase flow simulation in gas pipelines”, *Proceedings of the 2012 9th International Pipeline Conference – IPC 2012*, Calgary, Alberta, Canada, September;

FIGUEIREDO, A.B., BAPTISTA, R.M., RACHID, F.B.F., BODSTEIN, G.C.R., 2017, “Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model”, *International Journal of Multiphase Flow*, v.88, pp. 30-49;

FLETCHER, C.A. J., 1988, *Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific techniques for Flow Categories*, Volume 2. Springer-Verlag;

GODUNOV, S.K., 1959, “A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics”, *Matematicheskii Sbornik*, v. 47, pp. 357–393;

GUILLARD, H., DUVAL, F., 2007, “A Darcy law for the drift velocity in a two-phase flow model”, *Journal of Computational Physics*, v.224, pp. 288–313;

HARTEN, A., 1983, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, v. 49, pp. 357-393;

HARTEN, A., LAX, P.D., VAN LEER B., 1983, “On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws”, *SIAM Review*, v.25, No. 1, 33–61;

HIRSCH, C., 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows: Fundamentals of numerical discretization*, Volume 2. John Wiley & Sons;

INTEL, INTEL ® Visual FORTRAN Compiler Professional Edition for Windows with IMSL, Version 10.1;

ISHII, M., HIBIKI, T., 2006, *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*, 1sted. New York, Springer Science;

ISHII, M., MISHIMA, K., 1984, “Two-Fluid Model and Hydrodynamic Constitutive Relations”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 82, pp. 107-126;

ISSA, R.I., KEMPF, M.H.W., 2003, “Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model”, *International Journal of Multiphase Flow*, v.29, pp. 69-95;

JEFFREY, A., 1976, *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*, London, Pitman Publishing;

LEZEAU, P., THOMPSON, C. P., 1998, “Numerical Simulation of Multi-Phase Flow: Speed, Error Control & Robustness”, *Cranfield University Technical Report*;

LIU, M.S., STEFFEN, C.J., 1993, “A new flux splitting scheme”, *Journal of Computational Physics*, v.107, pp. 23-29;

MOODY, L.F., 1947, “An approximate Formula for Pipe friction factors”, *Transactions of ASME*, v. 69, pp.1005;

MUNKEJORD, S.T., 2007, “Comparison of Roe-type methods for solving the two-fluid model with and without pressure relaxation”, *Computer & Fluids*, v. 36, pp. 1061–1080;

MUNKEJORD, S.T., 2010, “A numerical study of two-fluid models with pressure and velocity relaxation”, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, v. 2, pp. 131-159;

MUNKEJORD, S.T., EVJE, S., FLÅTTEN, T., 2009, “A MUSTA scheme for a non-conservative two-fluid model”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v.31, pp. 2587-2622.

PAILLÈRE, H., CORRE, C., GARCÍA CASCALES, J.R., 2003, “On the extension of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models”, *Computers & Fluids*, v.32, pp. 891–916;

PATANKAR, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York;

PATRICIO, R. A. C., 2016, *Simulação de escoamento bifásico em gasodutos na presença de um pig utilizando o método numérico FCT*, Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

PATRICIO, R. A. C., SONDERMANN, C.N., FIGUEIREDO, A. B., BAPTISTA, R. M., RACHID, F. B.F., BODSTEIN, G. C. R., 2016, “Simulação numérica de escoamento monofásico de líquido em dutos na presença de PIG utilizando o método numérico FCT (*Flux-Corrected Transport*)”, Congresso Nacional de Engenharia Mecânica – CONEM; Fortaleza, CE, Brasil, Agosto;

QUIN, H.Q., 1992, “Comparisons of predictions with numerical benchmark test no.2.1: Faucet flow”, *Multiphase Science and Technology*, v. 6, pp. 577-590;

RANSOM, V.H., 1987, “Numerical benchmark test no.2.1: Faucet flow”, *Multiphase Science and Technology*, v. 3, pp. 465-467;

RANSOM, V.H., HICKS, D.L., 1984, “Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow”, *Journal of Computational Physics*, v.53, pp. 124-151;

RANSOM, V.H., HICKS, D.L., 1988, “Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow revisited”, *Journal of Computational Physics*, v.75, pp. 498-504;

ROE, P.L., 1981, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes”, *Journal of Computational Physics*, v.43(2), pp. 357–72;

RUSANOV, V.V., 1961, “Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v.1, 267–279;

SAUREL, R., ABGRALL, R., 1999, “A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows”, *Journal of Computational Physics*, v. 150, pp. 425–467;

SAUREL, R., ABGRALL, R., 2003, “Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures”, *Journal of Computational Physics*, v. 186, pp. 361–396;

SAUREL, R., FURFARO, D., 2015, “A simple HLLC-type Riemann solver for compressible non-equilibrium two-phase flows”, *computer & fluids*, v. 111, pp. 159–178;

SCHLUMBERGER, OLGA – Simulador Dinâmico de Escoamento Multifásico (do inglês: DynamicMultiphaseFlow Simulator), Versão 2014.2 – As licenças foram fornecidas através de uma parceria entre a Schlumberger e a COPPE;

SIMÕES, E.F., CARNEIRO, J.N.E., NIECKELE, A.O, 2014, “Numerical prediction of non-boiling heat transfer in horizontal stratified and slug flow by Two-Fluid Model”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 47, pp. 134-145;

SOD, G.A., 1985. “Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and Boundary Value Problems”, *Cambridge University Press*;

SONDERMANN, C.N., PATRICIO, R.A.C, FIGUEIREDO, A.B., BAPTISTA, R.M., RACHID, F.B.F., BODSTEIN, G.C.R., 2015, “Hyperbolicity analysis of a two- fluid two-phase flow one-dimensional model for stratified pattern”, *Proceedings of the 2015 International Mechanical Engineering Congress & Exposition*, Houston, Texas, USA, November;

SONDERMANN, C.N., 2016, *Simulação de escoamento bifásico em gasodutos com uma equação da energia para a mistura utilizando o método numérico FCT*, Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil;

STEWART, H. B., WENDROFF, B., 1984, “Two-phase flow: Models and Methods”, *Journal of Computational Physics*, v. 56, pp. 363-409;

TAITEL, Y., DUKLER, A. E., 1976, “A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near-horizontal gas-liquid flow”. *AIChE Journal*, v. 22, n. 1, pp. 47-55, Jan;

TORO E.F., 1999, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer;

TORO, E.F., 2006, “MUSTA: A multi-stage numerical flux, *Applied Numerical Mathematics*”, v.56, pp. 1464–1479;

TORO, E.F., TITAREV, V.A., 2006 MUSTA fluxes for systems of conservation laws, *Journal of Computational Physics*, v.216, pp. 403-429;

TORO, E. F., SPRUCE, M., SPEARES, W., 1994, “Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver”, *Shock Waves*, v.4, pp. 25–34;

TRAPP, J.A., RIEMKE, R.A., 1986, “A nearly-implicit hydrodynamic numerical scheme for two-phase flows”, *Journal of Computational Physics*, v.66, pp. 62–82;

WALSH, M.C., SPALDING, D.B., 1992, “Comparisons of predictions with numerical benchmark test no2.4: One-dimensional sedimentation”, *Multiphase Science and Technology*, v. 6, pp. 621-637;

WOLFRAM MATHEMATICA, Versão 10;

XIAO, J. J., SHOHAM, O., 1991, “Evaluation of Interfacial Friction Factor Prediction Methods for Gas/Liquid Stratified Flow”, *SPE 22765 66th Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, Texas, U.S.A.;

YOUNGS, D.L., 1987, "Numerical benchmark test no.2.4: Sedimentation", *Multiphase Science and Technology*, v. 3, pp. 465-467;

ZALESK, S.T., 1979, "Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids", *Journal of Computational Physics*, v.31, pp. 335-362;

ZIGRANG, D.J., SYLVESTER, N.D., 1985, "A Review of Explicit Friction Factor Equations", *Journal of Energy Resources Technology*, v. 107, pp. 280-283.

Apêndice A. Análise de Hiperbolicidade e Avaliação da Imposição das Condições de Contorno

Nesta seção é apresentada a análise de hiperbolicidade e avaliação da imposição das condições de contorno para os problemas de gasodutos, abordados nesse trabalho, envolvendo o modelo 4E1P. A análise de hiperbolicidade desses problemas é de grande importância, já que o 4E1P é condicionalmente hiperbólico, no que diz respeito as equações governantes de conservação de massa e quantidade de movimento que compõem o modelo. Caso o escoamento saia da faixa de hiperbolicidade do modelo, instabilidades numéricas podem ocorrer e contaminar a solução. Outra grande importância nesse estudo de hiperbolicidade é na implementação das condições de contorno, que, se impostas de forma errada, também podem gerar resultados inválidos.

Outros trabalhos recentes, também apresentam esse estudo para gasodutos, SONDERMANN *et al.* (2015) fez o estudo de hiperbolicidade para escoamentos bifásicos em padrão estratificado, resolvidos com o modelo 4E1P. Os autores alegam que o modelo perde hiperbolicidade perto das fronteiras do padrão estratificado e em outras áreas desta região, referindo-se à região do mapa de padrão de escoamentos de TAITEL E DUKLER (1976). Posteriormente SONDERMANN (2016) fez o estudo de hiperbolicidade para um modelo tipo 5E1P, composto pelas mesmas equações de conservação do modelo 4E1P e mais uma equação de conservação de energia para a mistura das duas fases. FIGUEIREDO *et al.* (2017) faz o estudo de hiperbolicidade para os mesmos problemas de *high holdup* e *low holdup* abordados nesse trabalho, mas os autores só estudaram o modelo 4E1P com o modelo de correção de pressão específico para escoamentos estratificados apresentado na Eq.(3.35). Essa dissertação já compara a análise desses autores com a análise do mesmo modelo, mas agora com ao modelo de correção de pressão de BESTION (1990), mais geral.

Para o modelo 4E1P ser considerado bem-posto, ou seja, apresentar solução dentro da faixa de hiperbolicidade, as raízes do polinômio característico devem ser reais e seus autovetores linearmente dependentes. É importante também enfatizar que a forma canônica utilizada para a discretização do modelo não interfere na hiperbolicidade do mesmo.

Os polinômios característicos dos modelos são obtidos no capítulo 3 desse trabalho. Para manter o modelo 4E1P com a pressão de interface de BESTION (1990) foi obtido o polinômio pode ser escrito como

$$P_{4E1P}^{BESTION}(\lambda) = \frac{\alpha_G \rho_G \alpha_L \rho_L}{c_G^2} \left[-\alpha_G (u_G - \lambda)^2 (u_L - \lambda)^2 + \frac{\alpha_G \Delta p_I}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\rho_G \alpha_L c_G^2}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \alpha_G c_G^2 (u_L - \lambda)^2 - \frac{\Delta p_I c_G^2}{\rho_L} \right] \quad (A.1)$$

Sendo que para o modelo 4E1P com o modelo de pressão interfacial específico para escoamentos estratificados, tem-se

$$P_{4E1P}^{Pc}(\lambda) = \frac{\alpha_G \rho_G \alpha_L \rho_L}{c_G^2} \left[-\alpha_G (u_G - \lambda)^2 (u_L - \lambda)^2 + \frac{\alpha_G \Delta p_{I,L}}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\rho_G \alpha_L c_G^2}{\rho_L} (u_G - \lambda)^2 + \alpha_G c_G^2 (u_L - \lambda)^2 - \frac{\alpha_G \Delta p_{I,L} c_G^2}{\rho_L} \right] \quad (A.2)$$

onde λ_i representa os autovalores associados obtidos pelas raízes do polinômio característico.

Segundo SONDERMANN (2016), a imposição das condições de contorno é feita a partir da análise dos sinais dos autovalores encontrados. O número de condições prescritas é função do número de características que emanam do contorno para dentro do domínio. Autovalores positivos avaliados em $x=0$ indicam o número de condições de contorno impostas na entrada do duto e o número de autovalores negativos avaliados em $x=L$ indicam número de condições de contorno impostas na saída do duto.

Para realização dessa análise, foi utilizado uma rotina do *software* comercial Mathematica (WOLFRAM MATHEMATICA, Versão 10). A rotina abrange todo o intervalo de velocidades superficiais de líquido u_{SL} , e gás, u_{SG} , que estão dentro do padrão estratificado, segundo TAITEL E DUKLER (1976). O valor da fração volumétrica de líquido é mantido constante e obtém-se um mapa dentro da região do padrão estratificado em que consta a informação se os autovalores são reais e a quantidade de autovalores que são positivos e negativos.

As Figuras A.1 e A.2 representam a análise de hiperbolicidade para o caso *low*

holdup, e as Figuras A.3 e A.4 para o caso *high holdup*. As regiões verdes no mapa de hiperbolicidade representadas nas figuras correspondem a zona em que o modelo 4E1P apresenta três autovalores reais positivos e um autovalor real negativo, enquanto que as zonas em azul representam dois autovalores reais e positivos e dois autovalores reais e negativos e, finalmente, as zonas laranjas representa uma região em que o modelo perde hiperbolicidade, ou seja, apresenta autovalores imaginários.

- Caso *low holdup*:

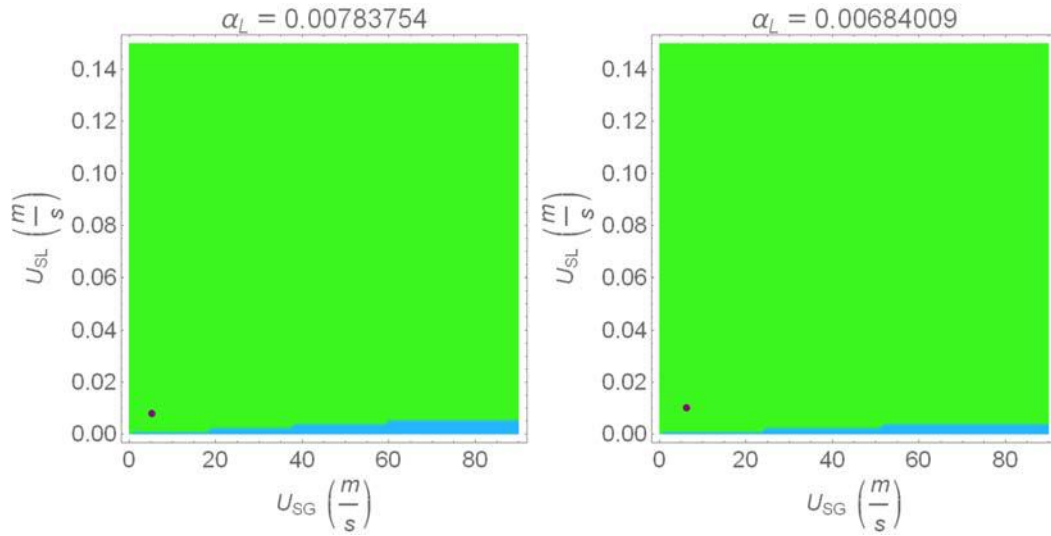


Figura A.0.1: Análise de hiperbolicidade para o caso *low holdup* com o termo de correção de pressão de BESTION (1990). À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

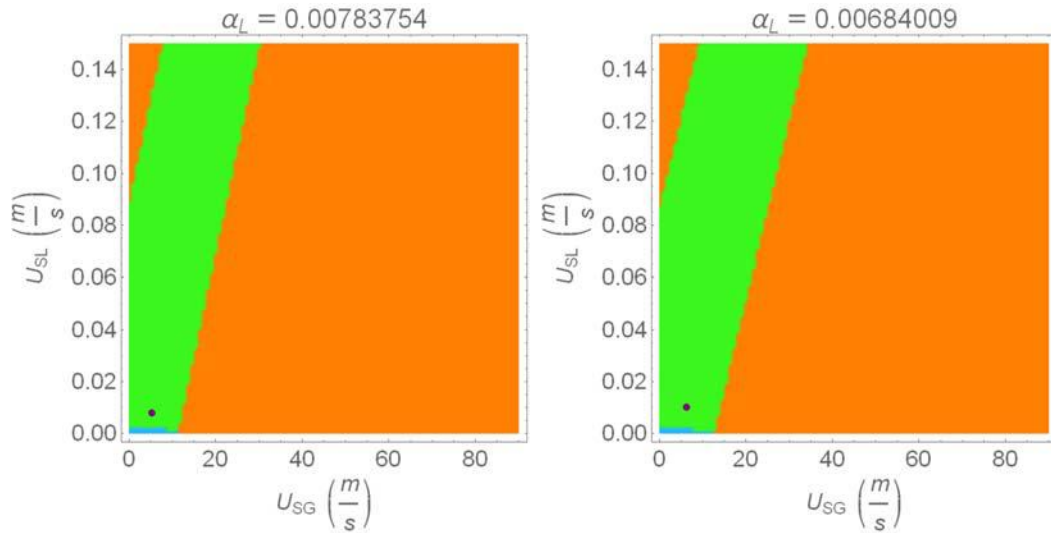


Figura A.0.2: Análise de hiperbolicidade para o caso *low holdup* com o termo de correção de pressão para escoamentos estratificados, p_c . À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

- Caso *high holdup*:

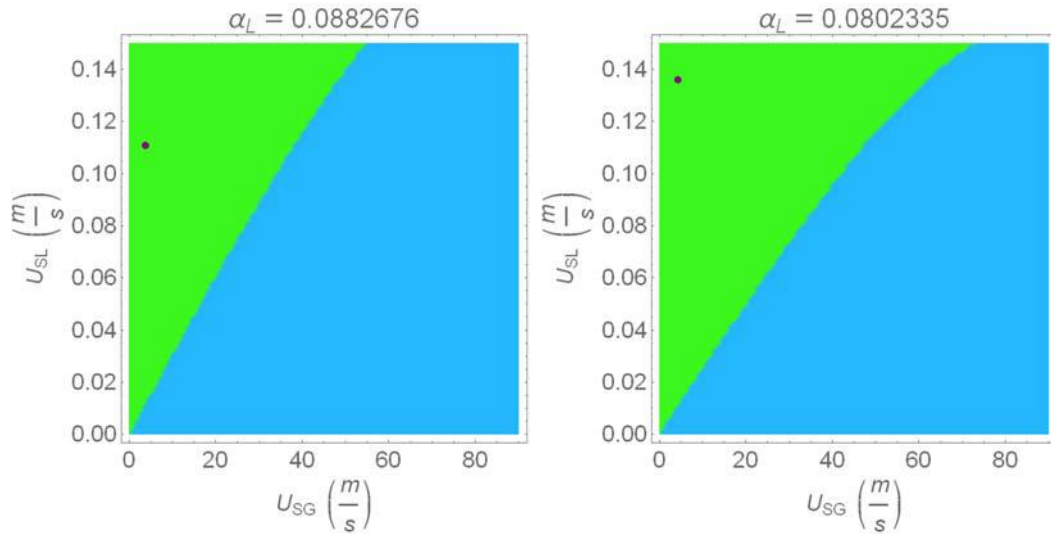


Figura A.0.3: Análise de hiperbolicidade para o caso *high holdup* com o termo de correção de pressão de BESTION (1990). À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

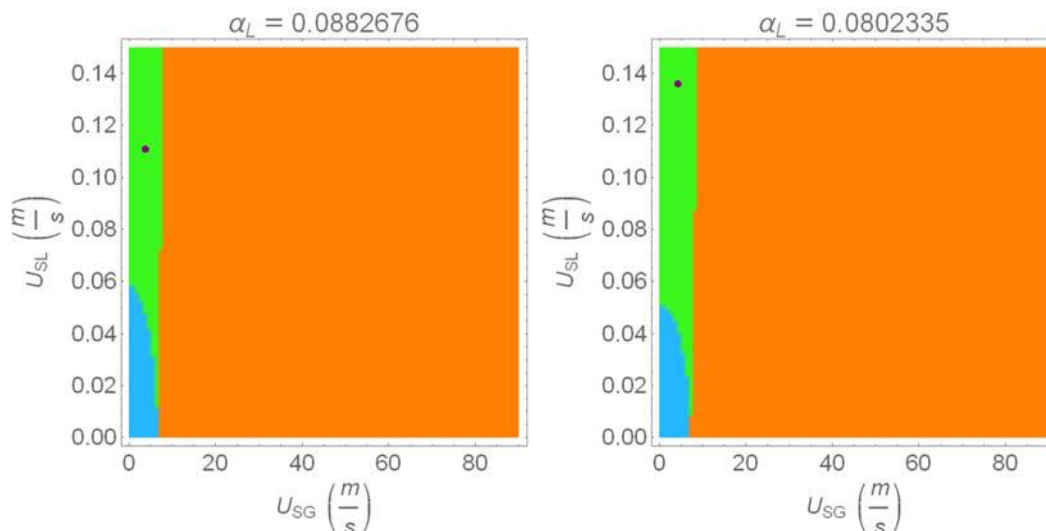


Figura A.0.4: Análise de hiperbolicidade para o caso *high holdup* com o termo de correção de pressão para escoamentos estratificados, p_c . À esquerda: Na entrada do duto. À direita: Na saída do duto.

Pode ser concluído pelas figuras acima que a imposição de três condições de contorno na entrada e uma na saída é ideal para os casos de gasodutos simulados, já que os pontos se encontram na região verde dos mapas. Os autovalores também são calculados durante a simulação, afim de garantir que não há uma inversão do número de condições de contorno impostas na entrada e na saída, e também afim de se garantir que o modelo se encontra na faixa de hiperbolicidade durante toda a simulação.

Comparando os casos, pode-se concluir que o caso que possui maior volume de líquido, *high holdup*, em geral apresenta um mapa mais suscetível a mudanças de autovalores, tanto na faixa de hiperbolicidade, quanto nos sinais dos autovalores. Para os dois casos, *high holdup* e *low holdup* é verificado que o modelo de pressão de BESTION (1990) amplia a faixa de hiperbolicidade do modelo, fazendo o modelo 4E1P ser hiperbólico em toda a faixa de regime estratificado. Esse resultado já era esperado tendo em vista que esse modelo de pressão interfacial é direcionado a manter o 4E1P hiperbólico. Embora o modelo de BESTION (1990) não apresentar justificativas físicas, ele parece ser uma boa alternativa ao termo de correção de pressão p_c , quando esse modelo específico para escoamento estratificado sair da zona de hiperbolicidade, em outros casos, tendo em vista que o comportamento das variáveis primitivas obtido foi bem próximo para os dois modelos. Mais testes devem ser feitos em trabalhos futuros para se ter uma conclusão final sobre a aplicabilidade do modelo de pressão interfacial de BESTION (1990) para escoamentos estratificados em gasodutos.

Apêndice B. Forma Canônica Alternativa para os Modelos

Para a solução de escoamentos bifásicos em gasodutos, FIGUEIREDO *et al.* (2017) utilizou uma forma canônica alternativa à forma utilizada no subcapítulo 4.1 dessa dissertação. Como o modelo numérico utilizado pelos autores é o modelo de referência para as simulações em gasodutos geradas nesse trabalho, julgou-se necessário descrever os vetores da forma canônica utilizada por esses autores. Recapitulando, define-se que \mathbf{Q} é o vetor de variáveis conservadas, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ é o vetor de fluxo, \mathbf{W} é o vetor das variáveis primitivas representado por Eq. (3.49) para o modelo 4E1P e Eq. (3.53) para o 5E2P, $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ e $\mathbf{N}(\mathbf{Q})$ são a matriz e o vetor que representam os termos não conservativos e $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$ é o vetor representativo do termo fonte. A expressão que representa os modelos 4E1P, Eq. (3.1) à (3.4), e 5E2P, Eq. (3.9) à (3.13), é então escrita na forma canônica conforme a Eq. (4.1).

A forma alternativa usada por FIGUEIREDO *et al.* (2017) contempla apenas o modelo 4E1P com o modelo de pressão interfacial específico para regimes estratificados, conforme a Eq.(3.35). A fim de utilizar o mesmo modelo de correção de pressão desses autores para o 5E2P, o modelo 5E2P é escrito aqui em uma forma canônica similar nesse caso.

Modelo 4E1P na forma canônica B – Esquema 2

Para o modelo 4E1P os vetores \mathbf{Q} , \mathbf{W} e \mathbf{S} se mantêm iguais a forma anterior, já os vetores \mathbf{F} , \mathbf{N} e a matriz \mathbf{H} são dados por:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \\ \rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G p_G \\ \rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L p_L \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_G \rho_G \\ \alpha_L \rho_L \\ \alpha_G \rho_G u_G \\ \alpha_L \rho_L u_L \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p - \Delta p_{I,G}}{\rho_L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p - \Delta p_{I,L}}{\rho_L} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Modelo 5E2P na forma canônica B – Esquema 2

Para o modelo 5E2P os vetores \mathbf{Q} , \mathbf{W} e \mathbf{S} se mantêm iguais a forma anterior, já os vetores \mathbf{F} , \mathbf{N} e a matriz \mathbf{H} são dados por:

$$\mathbf{F} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_G u_I \\ \rho_G \alpha_G u_G \\ \rho_L \alpha_L u_L \\ \rho_G \alpha_G u_G^2 + \alpha_G p_G \\ \rho_L \alpha_L u_L^2 + \alpha_L p_L \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{W} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_G \\ p_G \\ p_L \\ u_G \\ u_L \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} u_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p - \Delta p_{I,G} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta p_{I,L} - p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$